

N° D'ORDRE :

780

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES PHYSIQUES,

Par M. Fernand BEAULARD,

PROFESSEUR AGRÉGÉ DE PHYSIQUE AU LYCÉE D'AIX

1^{re} THÈSE. — SUR LA COEXISTENCE DU POUVOIR ROTATOIRE ET DE LA DOUBLE
RÉFRACTION DANS LE QUARTZ.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 28 Avril

1893, devant la Commission d'examen.

MM. LIPPMANN, *Président*.

HAUTEFEUILLE, }
BOUTY, } *Examineurs*

MARSEILLE

TYPOGRAPHIE ET LITHOGRAPHIE BARLATIER ET BARTHELET

Rue Venture, 19.

1893



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41552004_0036

N° D'ORDRE :

780

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES PHYSIQUES,

Par M. Fernand BEAULARD,

PROFESSEUR AGRÉGÉ DE PHYSIQUE AU LYCÉE D'AIX

1^{re} THÈSE. — SUR LA COEXISTENCE DU POUVOIR ROTATOIRE ET DE LA DOUBLE
RÉFRACTION DANS LE QUARTZ.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le

1893, devant la Commission d'examen.

MM. LIPPMANN, *Président*.

HAUTEFEUILLE, } *Examineurs*.
BOUTY, }

MARSEILLE

TYPOGRAPHIE ET LITHOGRAPHIE BARLATIER ET BARTHELET

Rue Venture, 19.

1893

ACADÉMIE DE PARIS

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

MM.		
DOYEN	DARBOUX, professeur....	Géométrie supérieure.
PROFESSEURS HONORAIRES..	{ PASTEUR. DUCHARTRE.	
PROFESSEURS	DE LACAZE-DUTHIERS.	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
	HERMITE	Algèbre supérieure.
	TROOST.	Chimie.
	FRIEDEL.....	Chimie organique.
	TISSERAND.	Astronomie.
	LIPPMANN.	Physique.
	HAUTEFEUILLE.	Minéralogie.
	BOUTY.	Physique.
	APPELL.....	Mécanique rationnelle.
	DUCLAUX	Chimie biologique.
	BOUSSINESQ.	Mécanique physique et expérimentale.
	PICARD	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	POINCARÉ	Calcul des probabilités, Physique mathématique.
	YVES DELAGE.....	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
	BONNIER	Botanique.
	DASTRE	Physiologie.
	DITTE	Chimie.
	MUNIER-CHALMAS	Géologie.
	GIARD	Évolution des êtres organisés.
	WOLF.	Astronomie.
PROFESSEURS ADJOINTS	{ CHATIN..... JOLY. PELLAT	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
		Chimie.
		Physique.
SECRÉTAIRE	FOUSSEREAU.	

A

MESSIEURS J. MACÉ DE LÉPINAY ET A. PEROT

PROFESSEURS A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE MARSEILLE

Hommage de respectueuse reconnaissance,

FERNAND BEAULARD.

PREMIÈRE THÈSE

SUR LA COEXISTENCE

DU POUVOIR ROTATOIRE ET DE LA DOUBLE RÉFRACTION

DANS LE QUARTZ

1° A L'ÉTAT NATUREL ET 2° SOUMIS A UNE COMPRESSION
NORMALE A LA DIRECTION DE L'AXE OPTIQUE

CHAPITRE PREMIER

INTRODUCTION

Après avoir découvert la polarisation rotatoire du quartz, le long de l'axe, Arago avait constaté les changements de couleurs que présente une lame de ce cristal quand la direction de la lumière s'écarte notablement de l'axe optique, et Biot avait donné les tableaux des différentes teintes que l'on observe, quand on opère dans ces conditions. On est, en réalité, en présence d'un effet très complexe.

Quand on passe de la propagation suivant l'axe optique à la propagation dans une direction perpendiculaire, le phénomène est évidemment continu. Or, les vibrations, de circulaires qu'elles

étaient dans le premier cas, deviennent rectilignes dans le second. L'hypothèse qui se présente naturellement à l'esprit est d'admettre que la transition s'effectue par l'intermédiaire de vibrations elliptiques. C'est celle qu'a développée Sir G. Airy ⁽¹⁾. Il a imaginé que les deux vibrations circulaires inverses de Fresnel se transforment en deux vibrations elliptiques semblables, de sens contraire, et dont les axes correspondants sont à angle droit. C'est ainsi que l'une des vibrations elliptiques a son grand axe perpendiculaire à la section principale tandis que l'autre a son grand axe dans la section principale. Lorsque l'incidence augmente, la première de ces vibrations tend à devenir la vibration rectiligne ordinaire, tandis que l'autre s'approche de plus en plus de la vibration extraordinaire. Sur ces deux ellipses, les mouvements vibratoires sont de giration contraire, et se propagent avec des vitesses différentes de telle sorte que si le quartz est dextrogyre, c'est le mouvement vibratoire elliptique dont la rotation est de gauche à droite qui a l'avance sur l'autre mouvement vibratoire elliptique qui tourne en sens contraire du premier. Airy admet que non-seulement les ellipses sont semblables, mais encore qu'elles ont une dimension commune, à la condition toutefois de provenir d'un mouvement vibratoire s'exécutant dans le plan de la section principale ou le plan perpendiculaire.

Pour vérifier le degré de réalité de cette décomposition spéciale des vibrations, dont celle que Fresnel a proposé n'est qu'un cas particulier, Airy employait une vibration primitivement elliptique dont la forme était progressivement modifiée de façon qu'elle fût transmise par le quartz sans altération; en observant avec un analyseur elliptique qui éteint la lumière primitive, l'interposition de la lame cristalline ne doit pas la faire reparaître.

Les paramètres de la birefringence elliptique du quartz qu'il s'agit de déterminer sont alors : 1° la différence de vitesse de ces deux

(1) AIRY. — On the nature of the light in the two Rays produced by the double refraction of quartz. — *Cambr. Trans.* IV, 1832.

vibrations; 2° le rapport k et $\frac{1}{k}$ des axes des ellipses suivant lesquelles le mouvement vibratoire a lieu.

Une étude expérimentale plus complète que celle d'Airy est due à Jamin ⁽¹⁾. Le but de cette étude était double. L'illustre physicien voulait d'abord vérifier s'il était possible de rendre compte des phénomènes que présente le quartz, lorsqu'un rayon de lumière se propage dans une direction oblique à l'axe, en supposant que le rayon vecteur de l'ellipsoïde de Huyghens est diminué d'une longueur constante, et ensuite soumettre au contrôle de l'expérience une théorie de Cauchy, que ce géomètre avait fourni, sur sa demande, à Jamin, et sur laquelle du reste nous aurons à revenir.

La méthode employée est classique. Elle consiste à recevoir la lumière, au sortir du quartz, sur un compensateur de Babinet qui mesure, par le déplacement de la frange centrale, la différence de marche qui existe entre les constituants principaux de la vibration elliptique émergente, tandis que par le jeu d'un analyseur, on peut, en amenant cette frange à être aussi noire que possible, déterminer le rapport des amplitudes de ces deux mouvements vibratoires. Ces données expérimentales mesurées, des formules permettent d'en déduire les quantités inconnues qui définissent la birefringence elliptique du quartz. Cette méthode, fort remarquable par l'emploi judicieux qui en a été fait par Jamin, dans bien des recherches, est néanmoins sujette à quelques causes d'erreurs, et peut donner lieu à quelques critiques.

En effet, on peut craindre les inexactitudes provenant du défaut de construction inévitable du compensateur tel que, par exemple, le défaut d'orientation des lames prismatiques, qui peut, du reste, être mis en évidence ⁽²⁾. Il y a aussi les difficultés provenant d'une orientation défectueuse du compensateur soit par rapport à la lame cristalline de quartz, soit par rapport aux sections principales du

(1) JAMIN. — C.-R., XXX, 99. — *Ann. de Chimie et de Phys.* [3], XXX, 55.

(2) MACÉ DE LÉPINAY. — *Ann. de Chimie et de Phys.* [5], t. XIX, p. 5, 1880.

polarisateur ou de l'analyseur. Les mesures ont été effectuées avec la lumière jaune, car la dispersion du quartz, sensible déjà sous une faible épaisseur, exige l'emploi d'une lumière homogène. Or, les données de l'expérience sont au nombre de deux : 1° le déplacement de la frange, mesuré par le jeu du compensateur et affecté par suite des erreurs dont nous avons parlé plus haut, et 2° la position de l'analyseur, qui rend la frange aussi noire que possible, position qui ne peut être déterminée qu'à quelques degrés près.

Dans une autre méthode, Jamin s'est adressé aux anneaux que présente, en lumière convergente, une lame de quartz taillée normalement à l'axe optique, et placée entre deux Nicols à l'extinction. Dans les uniaxes non rotateurs, les anneaux sont traversés par une croix noire ; mais dans le quartz les bras de la croix n'atteignent pas le centre. Pour mieux apprécier l'incidence sous laquelle on opère, on remplace la lumière convergente par un faisceau de lumière parallèle, on aura alors des tronçons d'anneaux correspondant à des maxima et des minima. Les minima correspondent, ainsi que l'indiquent les formules théoriques, à une différence de marche des vibrations elliptiques d'Airy, égale à un nombre entier de longueur d'onde. Pour ces incidences privilégiées, on aura donc l'un des éléments du problème. Il reste à déterminer la forme des ellipses vibratoires. A cet effet, on s'adresse aux maxima lumineux, où la différence de marche des vibrations d'Airy est un nombre impair de demi-longueur d'onde, tandis que la différence de marche entre les constituants principaux de l'ellipse émergente est égale à un nombre impair d'un quart de longueur d'onde. Il en résulte que l'ellipse émergente a ses axes dans les plans principaux du cristal. On opère la restauration de cet elliptique par le compensateur disposé d'une façon invariable de manière à donner un retard d'un quart de longueur d'onde. L'azimut de restauration rétabli, permet d'obtenir k c'est-à-dire la forme des ellipses d'Airy.

La méthode de Jamin a été modifiée par M. Hecht (1). Ce physi-

(1) HECHT. — *Annales de Wiedemann*, t. XXX, p. 274, 1887.

cien remplace le compensateur de Babinet par celui de Soleil et, de plus, polarise la lumière à 45° de la section principale de la lame ; c'est, en effet, pour un pareil azimut de polarisation que les défauts de construction du compensateur ont la plus faible influence. Pour éviter la complication qu'introduit la biréfringence qui sépare les rayons, et fait que les ondes ne sont plus strictement parallèles, l'auteur opère sur une série de lames de quartz taillées sous des obliquités connues par rapport à l'axe optique, et sur lesquelles on fait tomber normalement le faisceau lumineux. Une pareille marche est évidemment très correcte ; mais il faut, pour chaque lame, obtenir une taille rigoureusement exacte, ou déterminer l'erreur correspondante. La complication introduite par la biréfringence est du reste peu importante, et on peut, sans erreur appréciable, ne pas en tenir compte. Les expériences de M. Hecht sont au nombre de trois seulement, chacune d'elle correspondant à une lame diversement orientée sur l'axe optique. Le but de ce travail était de comparer les résultats de l'expérience avec ceux déduits d'un certain nombre de théories mathématiques. Dans le premier mémoire, l'auteur trouve en défaut toutes les théories proposées, tandis que dans le second ⁽¹⁾, M. Hecht conclut à la nécessité de nouvelles recherches.

La même question a été abordée, en vue d'une même comparaison, entre l'expérience et la théorie, par Mac-Connell ⁽²⁾. Les lames employées, tirées du même bloc de quartz, sont placées sur la plateforme d'un goniomètre. La lumière d'un brûleur Bunsen (carbonate de soude) éloigné, traverse un polariseur incliné de 45° par rapport au plan d'incidence, et tombe directement, la fente étant enlevée, sur la lentille collimatrice. Les anneaux noirs qui se produisent lorsqu'on fait tourner d'un angle convenable la lame de quartz par rapport à la lumière incidente, viennent se peindre

(1) HECHT, 1883 (1^{er} mémoire), *Annales de Wiedemann*, t. XX, p. 426. — 1887 (2^e mémoire), *Annales de Wiedemann*, t. XXX, p. 274.

(2) MAC CONNELL. — *Phil. Trans. London*, t. CLXXVII, p. 299 (1887).

dans le plan focal de la lunette d'observation réglée pour l'infini. L'oculaire est muni d'un analyseur croisé avec le polariseur. Cette manière d'opérer, qui n'est du reste que l'une des méthodes employées par Jamin, avait été indiquée et mise en œuvre antérieurement par Crouillebois ⁽¹⁾, qui recevait la lumière émergente, non plus sur une lunette, mais sur la fente d'un spectroscope. On obtient un spectre cannelé. Si la lumière incidente est polarisée dans le plan horizontal, par exemple, on cherche en inclinant le cristal, les incidences privilégiées qui correspondent à une vibration émergente polarisée comme la lumière incidente, ce qui permet de déterminer la différence de marche des vibrations elliptiques d'Airy, mais non leur forme. Cette méthode ne permet donc d'atteindre que l'un des deux paramètres qui définissent la biréfringence elliptique du quartz.

Il n'est pas inutile de se rendre compte tout d'abord de la façon dont prennent naissance ces franges du quartz oblique, et ce qui les différencie de celles que l'on observe lorsque la lumière traverse un bloc de quartz épais, suivant la direction de l'axe, ou suivant une direction perpendiculaire. Dans le premier cas, les franges proviennent de l'interférence des deux rayons circulaires inverses de Fresnel, et lorsqu'on agit sur l'analyseur on voit les franges se déplacer dans le spectre, mais en conservant leur même intensité. Dans le second cas, les franges proviennent de l'interférence de deux mouvements vibratoires rectilignes à angle droit ; ce sont les franges bien connues de Fizeau et Foucault. Lorsqu'on tourne l'analyseur les franges varient d'intensité, sur place, et lorsqu'on a tourné de 90° , les maxima ont pris la place des minima, et inversement, de telle sorte qu'il semble qu'une frange a marché de la moitié de l'intervalle qui les sépare tout d'abord. Dans le cas qui nous occupe, les franges résultent de l'interférence des deux mouvements vibratoires inverses d'Airy ; on obtient, à la sortie du cristal, une vibration elliptique émergente, engendrée

(1) CROUILLEBOIS. — *Ann. de Chim. et de Phys.*, 4^e série (1873).

par les deux vibrations elliptiques qui se propagent à l'intérieur du cristal avec des vitesses différentes. Si l'on fait tourner l'analyseur, les franges se déplacent et varient en même temps d'intensité, participant ainsi des deux cas précédents.

Si l'on veut déplacer une frange et lui conserver sa même intensité, il faut, à la fois, incliner le quartz et agir sur l'analyseur; on peut, par ce double mouvement, amener une frange sur une raie connue; nous verrons qu'il est possible de déduire, de ces deux données expérimentales, à savoir l'incidence de la lumière sur le cristal, et la position de l'analyseur, les deux quantités d et k qui sont les inconnues de la birefringence elliptique du quartz.

Mais avant d'exposer les recherches que j'ai entreprises sur ce sujet, qu'il me soit permis de remercier publiquement M. Macé de Lépinay, qui a bien voulu mettre à ma disposition les ressources de son laboratoire, et dont les conseils m'ont été d'un précieux secours pendant toute la durée de ce travail; je tiens aussi à exprimer toute ma reconnaissance à M. Perot, qui m'a prêté le concours de son expérience dans l'installation de mon appareil destiné à la compression du quartz.

Ce travail comprend deux parties :

A — On étudie d'abord le phénomène de la double réfraction elliptique du quartz, au moyen d'une méthode et de formules nouvelles. Les résultats de l'expérience sont comparés, tout d'abord, avec ceux que donne la théorie de M. Gouy ⁽¹⁾, et ensuite avec ceux que l'on tire d'autres théories purement mathématiques, dues à Mac Cullagh, Cauchy, Sarrau, Boussinesq, Lommel, Voigt, Von Lang, Ketteler, etc.

B — Dans la seconde partie, on étudie les phénomènes que

(1) GOUY. — *Journal de Physique* [2], t. IV, p. 149, 1885.

présente le quartz comprimé, lorsque à un pouvoir rotatoire constant suivant l'axe optique, on associe une double réfraction croissante. Les effets observés sont ceux que permet de prévoir la théorie des effets simultanés du pouvoir rotatoire et de la double réfraction, coexistant à chaque instant.

Dans ces conditions, le quartz comprimé devient biaxe, et en étudiant les phénomènes dans des directions obliques à l'ancien axe optique du cristal, on a pu étendre aux cristaux à deux axes la vérification de la théorie de M. Gouy.

PREMIÈRE PARTIE : *Quartz naturel.*

CHAPITRE II

DÉMONSTRATION DES FORMULES — MÉTHODE ET APPAREIL

Soit un rayon de lumière polarisée tombant sur la lame de quartz, sous l'incidence oblique ; prenons deux axes de coordonnées rectangulaires, l'axe des x étant dans le plan de la section principale que nous supposons horizontale.

PREMIER CAS. — Le rayon de lumière est polarisée dans la section principale, la vibration lumineuse est dirigée suivant la verticale,

$$y = \sin 2\pi \frac{t}{T}$$

ou pour abréger

$$(1) \quad y = \sin \xi .$$

Ce mouvement vibratoire est du reste, cinématiquement équivalent aux deux mouvements vibratoires elliptiques :

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{k}{1+k^2} \cos \xi , \\ y = \frac{k^2}{1+k^2} \sin \xi , \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x' = -\frac{k}{1+k^2} \cos \xi , \\ y' = \frac{1}{1+k^2} \sin \xi , \end{array} \right.$$

qui représentent d'après les idées d'Airy deux mouvements vibratoires s'effectuant sur deux ellipses dont les axes correspondant sont

à angle droit, et dont les rapports des axes sont inverses l'un de l'autre, de plus le plus petit axe de l'une des ellipses coïncide avec le grand axe de l'autre.

D'après l'hypothèse d'Airy, ces deux mouvements vibratoires de girations contraires se propagent avec des vitesses différentes à l'intérieur du cristal, et présentent par suite à l'émergence une différence de marche d évaluée en longueur d'onde ou en vibrations, cette différence de marche étant relative à l'unité d'épaisseur traversée par le rayon de lumière ; si pour simplifier l'écriture on supprime le facteur $\frac{k}{1+k^2}$ les deux mouvements vibratoires sont représentés par

$$(3) \quad \left. \begin{array}{l} \nearrow \left\{ \begin{array}{l} x = \cos \xi, \\ y = k \sin \xi, \end{array} \right. \\ \searrow \left\{ \begin{array}{l} x' = -\cos(\xi + 2\pi d), \\ y' = \frac{1}{k} \sin(\xi + 2\pi d); \end{array} \right. \end{array} \right\}$$

le sens des flèches montre que le mouvement vibratoire droit prend l'avance sur le mouvement vibratoire gauche. Ces deux mouvements vibratoires s'effectuent sur les deux ellipses représentées par la figure suivante

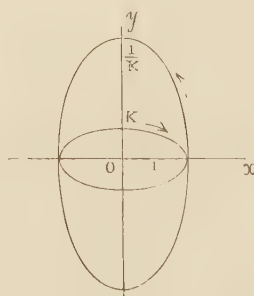


Fig. 1.

Ces deux elliptiques donnent à l'émergence une vibration

elliptique dont les éléments sont accessibles à une détermination expérimentale. Soient

$$(4) \quad \begin{cases} X = x + x' = A \sin(\xi + \varphi), \\ Y = y + y' = B \sin(\xi + \varphi'), \end{cases}$$

ou A et B représentent les amplitudes des deux constituants principaux de l'ellipse émergente, dont la différence de marche est $\varphi' - \varphi$. On trouve facilement les relations

$$(5) \quad \begin{cases} A^2 = 4 \sin^2 \pi d, \\ B^2 = \left(k + \frac{1}{k}\right)^2 - 4 \sin^2 \pi d, \\ tg \varphi = tg \pi d = \frac{1 - \cos 2\pi d}{\sin 2\pi d}, \\ tg \varphi' = \frac{\sin 2\pi d}{k^2 + \cos 2\pi d}. \end{cases}$$

Si l'on pose :

$$(6) \quad \frac{B}{A} = tg \alpha$$

et

$$(7) \quad k = tg \varepsilon,$$

il vient, en remarquant que

$$\begin{aligned} \left(k + \frac{1}{k}\right)^2 &= \frac{4}{\sin^2 2\varepsilon}, \\ tg^2 \alpha &= \frac{1}{\sin^2 2\varepsilon \cdot \sin^2 \pi d} - 1, \end{aligned}$$

d'où par une transformation facile :

$$(8) \quad \cos \alpha = \sin 2\varepsilon \cdot \sin \pi d.$$

Soit

$$u = \varphi' - \varphi,$$

il vient $tg u = tg (\varphi' - \varphi)$ et, après transformation,

$$tg u = \frac{1 - k^2}{1 + k^2} tg \pi d ,$$

ou en tenant compte de (7)

$$(9) \quad tg u = \cos 2\varepsilon \cdot tg \pi d .$$

Il est nécessaire de transformer ces deux formules (8) et (9) de manière à pouvoir calculer directement d et ε en fonction de α et de u , directement observables. On en déduit

$$\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \pi d} + \frac{tg^2 u}{tg^2 \pi d} = 1 ,$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \pi d \, tg^2 u = 1 - \cos^2 \pi d ,$$

$$\sin^2 \alpha = \cos^2 \pi d \frac{1}{\cos^2 u} ,$$

d'où

$$(10) \quad \cos u \sin \alpha = \cos \pi d ;$$

on a alors pour l'équation (9)

$$tg u = \cos 2\varepsilon \frac{\sin \pi d}{\cos \pi d} ,$$

ou

$$tg u = \cos 2\varepsilon \frac{\sin \pi d}{\cos u \cdot \sin \alpha} = \cos 2\varepsilon \frac{\cos \alpha}{\sin 2\varepsilon \cdot \cos u \cdot \sin \alpha} ,$$

$$\sin u = \frac{1}{tg \alpha \cdot tg 2\varepsilon} ,$$

d'où

$$(11) \quad tg 2\varepsilon = \frac{1}{tg \alpha \cdot \sin u} .$$

En résumé on a transformé (8) et (9) en (10) et (11) :

$$(10-11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos \pi d = \cos u \sin \alpha , \\ tg 2\varepsilon = \frac{1}{tg \alpha \cdot \sin u} . \end{array} \right.$$

DEUXIÈME CAS. — La lumière est polarisée perpendiculairement à la section principale, la vibration lumineuse est par suite horizontale.

On a

$$(1) \quad x = \sin \xi ,$$

et à la sortie le système des deux elliptiques est représenté par :

$$(2) \quad \left. \begin{array}{l} x = \frac{1}{k} \sin \xi , \\ y = -\cos \xi , \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} x' = k \sin(\xi + 2\pi d) , \\ y' = \cos(\xi + 2\pi d) . \end{array} \right\}$$

Les constituants principaux de la vibration elliptique émergente sont :

$$(3) \quad \begin{array}{l} X = x + x' = A' \sin(\xi + \varphi) , \\ Y = y + y' = B' \sin(\xi + \varphi') \end{array}$$

avec les équations de condition

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} A'^2 = \left(k + \frac{1}{k}\right)^2 - 4 \sin^2 \pi d , \\ B'^2 = 4 \sin^2 \pi d , \\ tg \varphi = \frac{k^2 \sin \pi d}{1 + k^2 \cos \pi d} , \\ tg \varphi' = tg \pi d = \frac{1 - \cos 2\pi d}{\sin 2\pi d} . \end{array} \right.$$

On en déduit

$$tg^2 \alpha = \frac{B'^2}{A'^2} = \frac{4k^2 \sin^2 \pi d}{(1 + k^2)^2 - 4k^2 \sin^2 \pi d} ,$$

et après transformations

$$(5) \quad \sin \alpha = \sin 2\varepsilon \cdot \sin \pi d ;$$

de même

$$tg u = tg(\varphi' - \varphi) = \frac{1 - k^2}{1 + k^2} tg \pi d ,$$

et remplaçant k par $tg \varepsilon$

$$(6) \quad tg u = \cos 2\varepsilon \cdot tg \pi d .$$

On transforme, comme dans le cas précédent (5) et (6) et on obtient

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos \pi d = \cos u \cdot \cos \alpha , \\ tg 2\varepsilon = \frac{tg \alpha}{\sin u} . \end{array} \right.$$

Il nous reste à établir les formules dans le cas où la lumière est polarisée à 45° de la section principale.

TROISIÈME CAS. — La lumière est polarisée à 45° . La vibration dont l'amplitude peut être prise égale à $\sqrt{2}$ donne deux composantes, dirigées respectivement suivant ox et oy , qui ont même amplitude égale à l'unité. On est ramené au deux cas précédents. Si on néglige toujours, pour la simplification de l'écriture, le facteur $\frac{k}{1+k^2}$ on a :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} X = \cos \xi - \cos(\xi + 2\pi d) + \frac{1}{k} \sin \xi + k \sin(\xi + 2\pi d) \\ \quad \quad \quad = A \sin(\xi + \varphi) , \\ Y = k \sin \xi + \frac{1}{k} \sin(\xi + 2\pi d) - \cos \xi + \cos(\xi + 2\pi d) \\ \quad \quad \quad = B \sin(\xi + \varphi') . \end{array} \right.$$

avec les équations de condition :

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} A \cos \varphi = \sin 2\pi d + k \cos 2\pi d + \frac{1}{k} , \\ A \sin \varphi = 1 - \cos 2\pi d + k \sin 2\pi d , \\ B \cos \varphi' = k + \frac{1}{k} \cos 2\pi d - \sin 2\pi d , \\ B \sin \varphi' = \frac{1}{k} \sin 2\pi d + \cos 2\pi d - 1 ; \end{array} \right.$$

on en conclut

$$(3) \quad \begin{cases} A^2 = \frac{1+k^2}{k^2} (1+k^2+2k \sin 2\pi d), \\ B^2 = \frac{1+k^2}{k^2} (1+k^2-2k \sin 2\pi d), \end{cases}$$

ou en posant encore $k = tg \varepsilon$

$$(3') \quad \begin{cases} A^2 = \frac{1}{\sin^2 \varepsilon \cdot \cos^2 \varepsilon} (1 + \sin 2\varepsilon \sin 2\pi d), \\ B^2 = \frac{1}{\sin^2 \varepsilon \cdot \cos^2 \varepsilon} (1 - \sin 2\varepsilon \sin 2\pi d), \end{cases}$$

d'où

$$tg^2 \alpha = \frac{B^2}{A^2} = \frac{1 - \sin 2\varepsilon \cdot \sin 2\pi d}{1 + \sin 2\varepsilon \cdot \sin 2\pi d},$$

qui peut s'écrire

$$\frac{\sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{1 - \sin 2\varepsilon \cdot \sin 2\pi d}{1 + \sin 2\varepsilon \cdot \sin 2\pi d};$$

on en tire la valeur de $\sin \alpha$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \sin 2\varepsilon \sin 2\pi d}{2},$$

ou

$$\frac{1 - \cos 2\alpha}{2} = \frac{1 - \sin 2\varepsilon \sin 2\pi d}{2},$$

d'où enfin :

$$(4) \quad \cos 2\alpha = \sin 2\varepsilon \sin 2\pi d.$$

Evaluons $\varphi - \varphi'$ on a

$$(5) \quad \begin{cases} tg \varphi = \frac{1 - \cos 2\pi d + k \sin 2\pi d}{\sin 2\pi d + \frac{1}{k} + k \cos 2\pi d}, \\ tg \varphi' = \frac{\frac{1}{k} \sin 2\pi d + \cos 2\pi d - 1}{k + \frac{1}{k} \cos 2\pi d - \sin 2\pi d}. \end{cases}$$

L'expression de $tg (\varphi - \varphi')$ est compliquée, mais après de nombreuses simplifications elle se met sous la forme

$$tg u = \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1} tg 2\pi d ,$$

ou en remplaçant k par $tg \varepsilon$

$$(6) \quad tg u = \cos 2\varepsilon tg 2\pi d .$$

On peut transformer (4) et (6), en le système suivant

$$(7) \quad \begin{cases} \cos 2\pi d = \sin 2\alpha \cdot \cos u , \\ tg 2\varepsilon = \frac{1}{\sin u \cdot tg 2\alpha} . \end{cases}$$

En résumé, on a les relations suivantes, qui permettent de passer des éléments α et u mesurables, de l'ellipse émergente, aux éléments d et ε qui caractérisent les deux vibrations elliptiques étudiées :

Vibration incidente verticale	$\uparrow$	(I)	$\begin{cases} \cos \pi d = \cos u \cdot \sin \alpha , \\ tg 2\varepsilon = \frac{1}{\sin u \cdot tg \alpha} . \end{cases}$
Vibration incidente horizontale	$\rightarrow$	(II)	$\begin{cases} \cos \pi d = \cos u \cdot \cos \alpha , \\ tg 2\varepsilon = \frac{tg \alpha}{\sin u} . \end{cases}$
Vibration incidente à 45°	$\nearrow$	(III)	$\begin{cases} \cos 2\pi d = \cos u \cdot \sin 2\alpha , \\ tg 2\varepsilon = \frac{1}{\sin u \cdot tg 2\alpha} . \end{cases}$

Exposé de la méthode.

Parmi toutes les méthodes que l'on peut employer pour l'étude d'une vibration elliptique, je me suis arrêté à celle de de Senarmont . appliquée dans un cas particulier. Il est à remarquer qu'il suffit pour examiner comment varie le phénomène avec l'incidence d'opérer sous un certain nombre limité d'incidences. Nous choisirons celles qui conduisent à la plus grande précision.

Si l'on désigne par U la différence de phase des constituants

principaux de l'ellipse émergente après son passage à travers le quartz et le mica-compensateur de la méthode de de Senarmont on a, dans le cas de la lumière incidente polarisée dans un plan perpendiculaire à la section principale, les deux formules

$$\cos \pi d = \cos U, \cos \alpha,$$

$$\operatorname{tg} 2\varepsilon = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sin U}.$$

On en déduit

$$\sin \pi d \cdot \Delta d = \cos \alpha \cdot \sin U \cdot \Delta U$$

et

$$\Delta d = \frac{\operatorname{tg} U}{\operatorname{tg} \pi d} \cdot \Delta U,$$

ainsi pour que l'erreur Δd de la différence de marche des vibrations elliptiques, introduite par l'erreur ΔU de la différence de phase des constituants principaux de l'ellipse émergente, soit la plus petite possible, il faut $\operatorname{tg} U = 0$ auquel cas $\Delta d = 0$. On en déduit $U = k\pi$ c'est-à-dire :

$$U = 0, \pi, \text{ etc....}$$

Ainsi, en opérant de telle sorte que la vibration émergente du système quartz + mica soit rectiligne, on est dans les meilleures conditions pour que l'erreur faite sur la détermination de l'un des paramètres de l'ellipse émergente entraîne une erreur minima sur la détermination de l'un des paramètres de la birefringence elliptique, c'est-à-dire sur la différence de marche des vibrations elliptiques d'Airy. Il résulte de ce qui précède, que le mica quart d'onde de de Senarmont rétablit la polarisation rectiligne, et que, par suite, la différence de phase introduite par le mica étant de $u' = \frac{\pi}{2}$, celle au sortir du quartz est aussi $u = \frac{\pi}{2}$; et suivant que les phases se retranchent ou s'ajoutent, on a pour la phase totale, au sortir du système formé par le quartz et le mica,

$$U = \frac{\pi}{2} \mp \frac{\pi}{2} = 0, \pi; \text{}$$

Ainsi il y a avantage à utiliser le mica quart d'onde à axe invariablement disposé dans l'un des plans principaux, et à choisir des incidences telles que la vibration elliptique émergente du quartz ait un axe horizontal, dans la section principale, l'autre étant dans la section perpendiculaire, c'est-à-dire vertical. Dans ce cas la différence de marche des constituants principaux d'une pareille ellipse est d'un quart de longueur d'onde, pour la radiation à laquelle correspond le mica quart d'onde, employé pour restaurer la vibration rectiligne. Les formules deviennent alors, la vibration incidente étant horizontale,

$$\begin{aligned}\cos \pi d &= 0, \\ \operatorname{tg} 2\varepsilon &= \operatorname{tg} \alpha,\end{aligned}$$

d'où

$$d = \frac{2p+1}{2} \lambda,$$

et

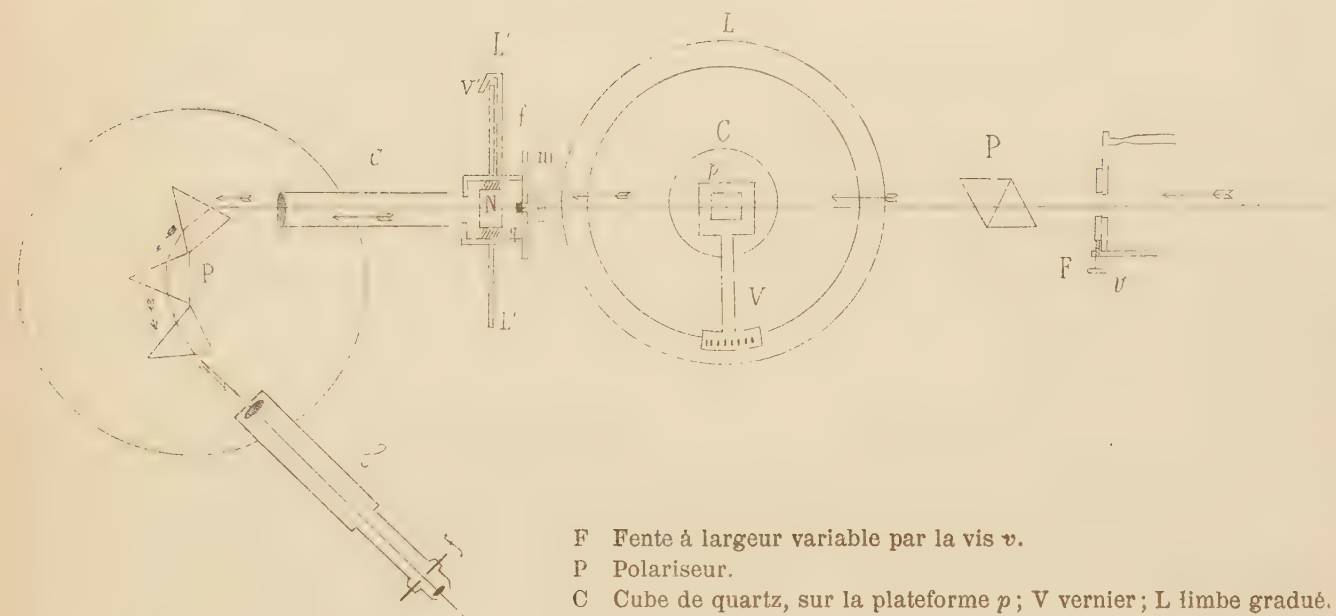
$$2\varepsilon = \alpha, \quad \text{d'où } k = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2};$$

on a donc $\Delta\varepsilon = \frac{1}{2} \Delta\alpha$; ainsi l'erreur de lecture $\Delta\alpha$ faite sur l'analyseur introduit une erreur moitié moindre sur la valeur de ε qui détermine la forme des vibrations elliptiques d'Airy. Nous verrons plus loin que l'erreur $\Delta\alpha$ est très faible, et par suite, à fortiori, l'erreur $\Delta\varepsilon$.

Description de l'appareil.

L'appareil se compose (*fig. 2*) : 1° d'un polarisateur; 2° d'un cube épais de quartz ayant un couple de faces perpendiculaires à l'axe, placé sur une plateforme au-dessus d'un limbe gradué, muni d'un vernier donnant la minute; 3° d'un mica quart d'onde pour la radiation jaune, orienté de façon à avoir son axe soit dans le plan d'incidence, soit dans le plan perpendiculaire; 4° d'un spectroscope après la fente duquel se trouve un analyseur, muni d'un limbe vertical, donnant la minute et possédant en outre un quartz à deux rotations,

Quartz D
(Fig. 2)



- F Fente à largeur variable par la vis *v*.
- P Polariseur.
- C Cube de quartz, sur la plateforme *p* ; V vernier ; L limbe gradué.
- m* Mica quart d'onde (raie D).
- f* Fente du spectroscop.
- q* Quartz à deux rotations.
- N Nicol à faces normales ; mobile avec le vernier *V'* ; la rotation se lit sur le limbe gradué *L'*.
- c* Collimateur du spectroscop.
- P Prismes.
- l* Lunette du spectroscop.
- f'* Fente oculaire.

placé derrière la fente, biquartz dont la ligne de séparation est horizontale et, par suite, perpendiculaire à la direction de la fente. L'oculaire du spectroscope est muni d'une fente oculaire, formée par deux petites règles rectangulaires métalliques, pouvant glisser dans deux coulisses horizontales ; on peut ainsi isoler la radiation que l'on étudie et se débarrasser, en même temps, de la lumière provenant des radiations voisines.

On opère de la façon suivante :

On vise une radiation déterminée du spectre, la raie D ⁽¹⁾ dans le jaune, et on l'isole, tout d'abord, grossièrement afin d'éliminer simplement les radiations inutiles. Ensuite, agissant sur le cube, après avoir au préalable polarisé la lumière incidente, on incline celui-ci d'une façon progressive sur le rayon incident, de telle sorte qu'une frange soit amenée sur la raie D ; mais, en même temps que la frange se déplace, son intensité lumineuse varie ; aussi faut-il agir simultanément sur l'analyseur et conserver à la frange, à peu près, sa même intensité. Le mica ayant son axe horizontal ou vertical, mais dans tous les cas restant immobile, compense la différence de marche qui existe entre les constituants principaux de l'ellipse émergente ; la compensation pouvant, suivant les cas, avoir lieu par soustraction ou addition d'un quart de longueur d'onde, mais la valeur de u (différence de phase des constituants principaux de l'ellipse émergente) est toujours égale à $\frac{\pi}{2}$.

Pour la couleur considérée, u est donc connu ; il reste à déterminer l'angle α de la vibration rectiligne rétablie et de la section principale. Le mica ayant rétabli la polarisation rectiligne, il suffit de rendre, ainsi que l'ont fait les auteurs qui ont étudié les vibrations elliptiques, la frange aussi noire que possible en agissant sur l'analyseur. Ce procédé manque absolument de précision, les écarts peuvent atteindre jusqu'à 5° et la répétition des mesures ne suffit

(1) Le spectroscope employé, à trois prismes, dédouble la raie D ; on bissecte alors le milieu de l'intervalle D₁ D₂ au moyen des fils du reticule : en sorte que les mesures sont relatives à la radiation jaune comprise entre D₁ et D₂.

pas à écarter cette grosse cause d'erreur. Pour mesurer avec précision l'angle α , j'ai appliqué l'artifice employé dans les polarimètres à pénombre, et c'est là le rôle du quartz à deux rotations ⁽¹⁾, dont la ligne de séparation est perpendiculaire à la fente. La frange présente alors deux parties inégalement sombres, et en agissant sur l'analyseur on arrive avec une précision très grande à obtenir l'égalité de teintes des deux plages superposées. La lecture faite sur l'analyseur détermine l'angle α . Il faut remarquer que, en agissant sur l'analyseur, on déplace la frange, et qu'il est par suite nécessaire d'agir sur le cube pour la ramener sur la raie D.

C'est donc par une série de retouches combinées de l'analyseur et du cube qu'on obtient ce double résultat de l'égalité de teintes des deux parties de la frange et de la coïncidence de celle-ci avec la raie D. On obtient du reste l'égalité d'intensité lumineuse des deux portions de la frange, avec une très grande précision, si on a soin de rétrécir le plus possible, pendant ces dernières opérations, la fente oculaire, de manière à avoir affaire réellement à une radiation homogène. Soit OA la vibration rectiligne rétablie, elle tombe sur le biquartz et on a les deux vibrations OA' et OA'' qui représentent la vibration OA ayant tourné du même angle ω à droite ou à gauche.

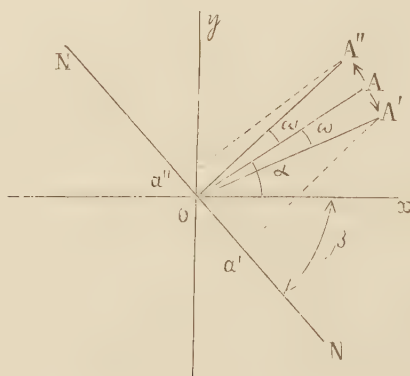


Fig. 3.

(1) La rotation est d'environ 5°.

Pour éteindre la vibration rectiligne il faut que la section principale de l'analyseur soit perpendiculaire à OA ; or soit ON cette section principale, faisant avec OX, direction horizontale l'angle β . On a en prenant OA = 1 ,

$$\text{Projection de OA}' \text{ sur ON} = Oa' = \cos (\beta + \alpha - \omega)$$

$$\text{Projection de OA}'' \text{ sur ON} = Oa'' = \cos (\pi - \beta - \alpha - \omega)$$

les deux plages supérieures sont également éclairées quand

$$Oa' = Oa'',$$

c'est-à-dire quand

$$\beta + \alpha = \frac{\pi}{2},$$

condition qui est indépendante de ω .

Le champ est alors uniforme et son éclat a pour valeur

$$I = \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - \omega \right) = \sin^2 \omega$$

qui dépend de l'angle ω ; la sensibilité de l'œil est plus grande pour des intensités lumineuses moyennes que pour des intensités trop fortes, ou trop faibles, ce qui doit dicter la valeur à donner à l'angle ω . Le biquartz employé, donnait une rotation d'environ 5°. Si la section principale ne fait pas l'angle $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ on a deux plages inégalement éclairées, présentant une différence d'éclat dI , et on a :

$$\frac{dI}{I} = \frac{\cos^2 (\beta + \alpha - \omega) - \cos^2 (\pi - \beta - \alpha - \omega)}{\sin^2 \omega},$$

ou après transformation

$$\frac{dI}{I} = \frac{2 \sin 2(\beta + \alpha) \sin 2\omega}{\sin^2 \omega} = 2 \frac{\sin 2(\alpha + \beta)}{\operatorname{tg} \omega},$$

or l'œil apprécie une différence d'éclat de $\frac{1}{60^e}$, on a alors pour l'erreur E possible sur la position de l'analyseur

$$\frac{1}{60} = \frac{2 \sin(\pi + 2E)}{\operatorname{tg} 5^{\circ}},$$

d'où $E = 1' 15''$; c'est, en effet, l'écart que présentent les mesures, et même cette erreur peut être de beaucoup réduite, si l'on a soin d'opérer absolument dans la chambre noire, la sensibilité de l'œil devient très grande et la répétition des mesures finit par donner toujours le même résultat, à moins d'une demi-minute. Aussi, en admettant que la position de l'analyseur est exactement déterminée à une minute près, on a pour l'angle ε , qui est égal à $\frac{\alpha}{2}$, une erreur de $\frac{1'}{2}$. Telle est la précision obtenue.

Lorsqu'on amène sur la raie D une frange, en inclinant le cube épais de quartz et que l'on établit l'égalité de teinte au moyen de l'analyseur, on constate que la partie supérieure et la partie inférieure de la frange ont subi un léger glissement latéral en sorte que ces deux portions ne sont plus absolument sur le prolongement l'une de l'autre, mais présentent une partie commune qui est sur la raie D, à laquelle se rapporte la mesure effectuée. C'est cette partie commune que l'on isole au moyen de la fente oculaire; et le raisonnement suivant va nous montrer la nécessité de cet isolement, afin d'opérer sur une radiation homogène bien définie.

Cet effet est du au quartz à deux rotations placé derrière la fente du spectroscope; il est facile de l'expliquer. La vibration est rendue rectiligne pour la radiation jaune, mais pour les radiations voisines on a un elliptique très allongé qui tombe sur le biquartz. Soient, comme on l'a fait jusqu'ici, α l'angle que fait avec la vibration incidente primitive le grand axe de l'ellipse, a et b les amplitudes des constituants principaux, dont la différence de phase est u ; en posant $\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \psi$ on a :

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \operatorname{tg} 2\psi \cdot \cos u.$$

Le biquartz fait tourner seulement l'ellipse sans la déformer, soit φ cette rotation, et θ l'angle de la section principale de l'analyseur avec OX, direction horizontale de la vibration incidente primitive, les axes de l'ellipse ont pour valeur $\cos \beta$ et $\sin \beta$ et après la rotation φ produite par l'une des lames du biquartz on a la figure ci-contre (*fig. 4*).

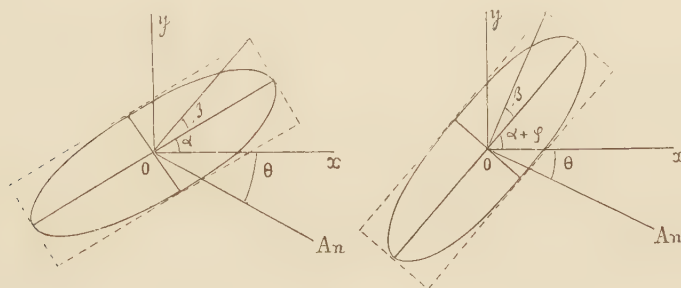


Fig. 4.

On a pour l'intensité de la lumière que laisse passer l'analyseur

$$I^2 = \cos^2 \beta \cos^2 (\alpha + \varphi + \theta) + \sin^2 \beta \sin^2 (\alpha + \varphi + \theta)$$

et en passant aux angles doubles

$$I^2 = \frac{1}{2} \left[1 + \cos 2\beta \cos 2(\alpha + \varphi + \theta) \right].$$

L'autre lame de biquartz fait tourner cette même vibration elliptique de l'angle φ en sens contraire et pour l'intensité lumineuse que transmet l'analyseur, on a

$$I'^2 = \frac{1}{2} \left[1 + \cos 2\beta \cos 2(\alpha - \varphi + \theta) \right].$$

La condition d'égale intensité donne

$$\cos 2\beta \sin 2\varphi \sin 2(\alpha + \theta) = 0.$$

La solution $\cos 2\beta = 0$ est à rejeter puisque β est peu différent de 0, elle correspond à $\beta = 45^\circ$ c'est à dire à la vibration circulaire,

(la position de l'analyseur est dans ce cas indéterminée, ce qui est évident). La solution $\sin 2\varphi = 0$ donne $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Or φ est la rotation imprimée par le biquartz égale à environ 5° ; il reste :

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \theta) &= 0, \\ \alpha + \theta &= \frac{\pi}{2},\end{aligned}$$

solution à laquelle nous sommes arrivés en considérant une vibration rectiligne; cette relation ne peut évidemment être satisfaite que pour une radiation déterminée, le jaune, par exemple. Pour les radiations voisines plus réfrangibles ou moins réfrangibles, $\alpha + \theta$ est différent de $\frac{\pi}{2}$ et la rotation est différente de φ . Les vibrations voisines étant presque rectiligne, l'angle du grand axe de l'ellipse du jaune étant α , l'angle de l'ellipse plus réfrangible que le jaune sera plus grand que α , et l'angle de l'ellipse moins réfrangible sera plus petit que α . De même la rotation φ relative aux radiations situées du côté du violet sera supérieure à la rotation des radiations situées du côté du rouge. On a le tableau :

	Valeur de $\alpha + \theta$.	Valeur de φ .
Radiations rouge-jaune	$\frac{\pi}{2} - \varepsilon'$	$\varphi - \varepsilon$
Radiation jaune.....	$\frac{\pi}{2}$	φ
Radiations jaune-violet.....	$\frac{\pi}{2} + \varepsilon'$	$\varphi + \varepsilon$

Cela posé désignons par I_1^2 et I_2^2 les intensités lumineuses après le passage à travers le biquartz, I_1 est l'intensité relative à la lame supérieure, I_2 se rapporte à la lame inférieure; considérons d'abord les radiations un peu moins réfrangibles que le jaune, on a pour ces radiations :

$$\begin{aligned}I_1^2 &= \frac{1}{2} \left[1 + \cos 2\beta \cos 2 \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon' + \varphi - \varepsilon \right) \right] \\ I_2^2 &= \frac{1}{2} \left[1 + \cos 2\beta \cos 2 \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon' - \varphi + \varepsilon \right) \right]\end{aligned}$$

et pour les radiations plus réfrangibles :

$$I_1'^2 = \frac{1}{2} \left[1 + \cos 2\beta \cos 2 \left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon' + \varphi + \varepsilon \right) \right]$$

$$I_2'^2 = \frac{1}{2} \left[1 + \cos 2\beta \cos 2 \left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon' - \varphi - \varepsilon \right) \right] ;$$

il en résulte

$$I_1 < I_2$$

$$I_1' > I_2'$$

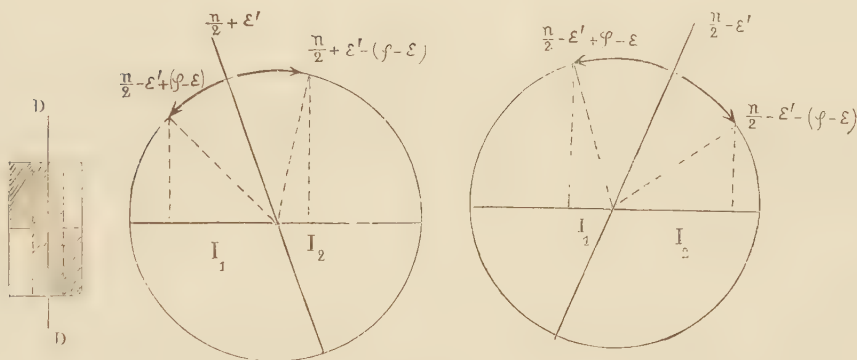


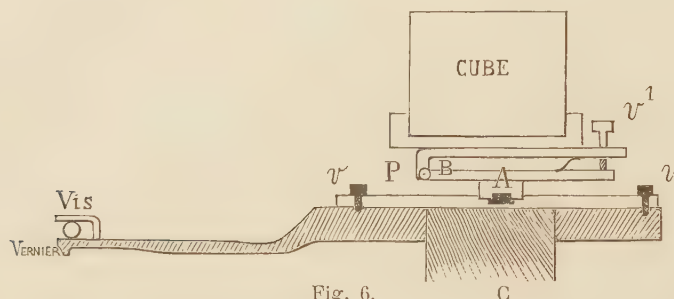
Fig. 5.

Ainsi pour la radiation jaune les deux plages supérieure et inférieure, ont même intensité, du côté du rouge il y a plus de lumière au bas de la frange qu'en haut de celle-ci ; et c'est l'inverse du côté du violet, d'où l'aspect de la frange, représentée par la figure ci-dessus. (*fig. 5*). Pour effectuer une mesure il n'y a qu'à considérer la partie commune et à l'isoler au moyen de la fente oculaire, qui a dès lors un double rôle : isoler la radiation considérée et protéger l'œil contre toute lumière voisine afin de lui conserver sa sensibilité.

Réglage de l'appareil.

A. — Après avoir mis le faisceau de lumière en place pour qu'il tombe sur le collimateur du spectroscope, on règle le polariseur et

l'analyseur. Le polariseur étant placé de façon à donner une vibration lumineuse horizontale par exemple, on règle l'analyseur à l'extinction ; grâce à l'emploi du biquartz, on a dans le champ de la lunette deux spectres superposés, inégalement éclairés, que l'on amène en agissant sur l'analyseur à avoir la même intensité lumineuse. Ce réglage s'effectue avec une très grande précision.



B. — On place alors le cube de quartz (*fig. 6*), (ou les lames étudiées). Ce cube se met sur une plate-forme carré P où il entre exactement, cette plate-forme peut tourner autour d'un axe vertical A, et autour d'un axe horizontal projeté en B, faisant charnière ; une vis v permet de faire basculer le cube autour de B. L'ensemble des diverses pièces de la plate-forme, est fixé par deux vis vv , au vernier V, que l'on peut faire tourner autour de la colonne de cuivre C immobile ; le vernier, en tournant, entraîne dès lors la plate-forme et le cube. On place celui-ci normalement au faisceau incident, en se laissant guider par le rayon de retour, que l'on a avantage à prendre aussi étroit que possible, ce qui s'obtient au moyen d'un écran en carton percé d'une petite ouverture ; on agit sur le cube pour obtenir ce résultat, au moyen d'une rotation autour de A, et autour de B. De plus, l'orientation du cube est telle que le rayon incident soit perpendiculaire à l'axe optique du quartz. Dès lors, si le *rayon incident est horizontal* (résultat auquel on arrive en relevant, au moyen d'une règle verticale, la distance de l'ouverture du porte-lumière au-dessus de la table

qui porte l'appareil et en portant celle-ci sur une autre règle, sur laquelle on place un repère, que le rayon de lumière incidente devra exactement atteindre). Le cube étant à peu près rigoureusement taillé, a ses faces qui sont, les unes horizontales, les autres verticales ; l'axe optique est dans un plan horizontal, c'est-à-dire dans un plan parallèle au plan du limbe L que l'on règle, à la façon ordinaire, au moyen de vis calantes.

Si le réglage du cube est défectueux, on voit dans le spectre les bandes de Fizeau et Foucault ; on agit lentement sur le cube ainsi que sur l'analyseur et le polariseur pour les faire disparaître ; quelques retouches suffisent pour obtenir ce résultat, la section principale du quartz est alors exactement horizontale.

C. — On introduit alors le mica porté sur un limbe gradué, et on met l'axe du mica horizontal ou vertical, résultat que l'on obtient avec une grande précision, toujours à cause du biquartz, qui permet d'obtenir l'égalité de teintes des deux spectres superposés.

D. — On fait tourner le cube autour de l'axe A, de façon à présenter normalement au rayon incident, le couple de faces, perpendiculaire à l'axe optique. Le rayon incident traverse alors le cristal suivant l'axe optique si le cube est exactement taillé, ce dont il y a lieu de s'assurer, ainsi qu'il sera dit plus loin.

Il importe aussi d'avoir un faisceau de lumière bien parallèle tombant sur le quartz ; de plus, en inclinant plus ou moins ce cube sur le faisceau incident, le faisceau émergent subit un déplacement latéral, et finit par ne plus tomber exactement sur la fente du spectroscope ; pour corriger cet effet, le porte-lumière porte une fente à laquelle on peut, au moyen de deux coulisses horizontales, imprimer un déplacement latéral normal au faisceau incident, et faire ainsi tomber le rayon émergent toujours sur la fente du spectroscope. L'ensemble de la fente du porte-lumière et de celle du spectroscope permet aussi d'arriver à un parallélisme parfait des rayons qui forment le faisceau incident. La distance qui sépare les deux fentes est de 1^m50 environ, la largeur de la fente du porte-

lumière est de un peu moins de un demi-centimètre, $4^{\text{m/m}}$ environ. Le rayon le plus oblique du faisceau tombe sous un angle ω tel que

$$\text{tg } \omega = \frac{2^{\text{mm}}}{1500} = \frac{1}{750},$$

c'est-à-dire sous une obliquité de $4'30''$; ainsi, les rayons du faisceau sont parallèles à moins de $5'$. On peut, en rétrécissant la fente du porte-lumière, et perdant un peu de lumière, ce qui n'a pas d'inconvénient lorsque le ciel est exempt de nuages et que la lumière solaire est intense, lui donner une largeur de $1^{\text{m/m}}$, auquel cas on a

$$\text{tg } \omega = \frac{1}{3000},$$

c'est-à-dire un angle d'une minute.

Marche d'une expérience.

L'appareil étant réglé, si on incline de plus en plus le cube sur le faisceau incident, on amène une première frange noire sur la raie D, mais au fur et à mesure qu'elle se déplace, son intensité varie, et si en même temps on n'agissait pas sur l'analyseur, on la verrait disparaître ; on amène donc, par une série de retouches sur le cube et sur l'analyseur, la frange sur la raie D, et en agissant à nouveau sur l'analyseur, on établit l'égalité de teinte de la partie supérieure et de la partie inférieure de la frange. On recommence l'expérience en inclinant le cube sur le faisceau incident, en sens contraire du premier cas ; on lit sur le limbe, l'inclinaison du rayon incident sur la normale au cube, et les deux mesures faites en inclinant à droite et à gauche dispensent, à la rigueur, de connaître le zéro du limbe. On relève en même temps l'angle α , lu au moyen de l'analyseur. Si la polarisation est telle que la vibration incidente soit dans le plan de la section principale, on applique les

formules (II), qui deviennent, dans le cas de l'expérience, précédemment décrite,

$$\begin{aligned}\cos \pi d &= 0, \\ \operatorname{tg} 2\varepsilon &= \operatorname{tg} \alpha,\end{aligned}$$

c'est à dire

$$d = (2p + 1) \frac{\lambda}{2} \quad \text{et} \quad k = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

On choisit p tel que pour la première frange d soit supérieur à la différence de marche due au pouvoir rotatoire; de plus l'épaisseur traversée est $\frac{e}{\cos r}$ (r angle de réfraction du rayon ordinaire) on ramène la différence de marche à l'unité d'épaisseur, en divisant par l'épaisseur traversée dans le quartz et on a pour la différence de marche des vibrations elliptiques

$$d = \frac{(2p + 1) \cos r}{2e} \lambda,$$

et pour leur forme

$$k = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Si la lumière est polarisée à 45° on a les formules (III) à appliquer; elles deviennent :

$$\left\{ \begin{aligned} \cos 2\pi d &= 0, \\ \operatorname{tg} 2\varepsilon &= \frac{1}{\operatorname{tg} 2\alpha}, \end{aligned} \right.$$

qui donnent :

$$d = \frac{(2p + 1) \cos r}{4e} \lambda,$$

et

$$k = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right).$$

En résumé, les données de l'expérience sont : 1° l'angle i lu sur le limbe gradué qui porte le cube, qui permet de trouver

l'angle r par l'application de la loi de la réfraction ordinaire ;
 2° l'angle α lu sur le limbe vertical de l'analyseur, qui correspond à l'égalité de teintes des deux plages supérieure et inférieure de la frange, que l'inclinaison i amène sur la raie D, on déduit de ces données, d et k par les relations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Vibration } \longrightarrow \\ d = \frac{(2p+1) \cos r}{2e} \lambda \\ k = tg \frac{\alpha}{2} \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Vibration } \nearrow \\ d = \frac{(2p+1) \cos r}{4e} \lambda \\ k = tg \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) . \end{array} \right.$$

Dans cette manière d'opérer le mica joue le rôle d'un compensateur, à différence de marche fixe égale à un quart de longueur d'onde pour le jaune (raie D), en sorte que à la sortie de la lame de quartz, la vibration elliptique, (que le mica transforme en vibration rectiligne), a lieu suivant une ellipse qui a ses axes dans les deux plans principaux, c'est-à-dire suivant une ellipse rapportée à ses axes. C'est en inclinant, de plus en plus le cristal, sur la lumière incidente que l'on arrive à saisir précisément ces ellipses particulières, car pour une position arbitraire de la lame, l'ellipse émergente a une orientation quelconque. Ce sont des incidences particulières, ou des épaisseurs particulières, qui produisent à la sortie du quartz, soit une vibration rectiligne, soit une vibration elliptique ayant ses axes dans les plans principaux du cristal.

La méthode employée revient donc à choisir, soit par une variation d'épaisseur traversée, soit par une variation d'incidence ces vibrations elliptiques particulières, et à les faire tomber sur le compensateur mica quart d'onde, qui rétablit la rectilignité de la vibration, et permet de déterminer l'angle α ; on peut ainsi atteindre, en même temps que la différence de marche, la forme des vibrations elliptiques d'Airy ; il n'en serait pas ainsi si l'on suivait la méthode employée par quelques auteurs, qui consiste à opérer sur les inci-

dences privilégiées qui donnent à la sortie du cristal une vibration rectiligne (1).

La précision de la méthode est due : 1° à l'avantage que présente le mica quart d'onde fixe, qui permet d'appliquer la méthode de Sénarmont dans le cas où elle donne le meilleur résultat ; 2° à l'emploi du quartz à deux rotations qui permet de déterminer l'angle α avec une très grande sensibilité.

Comme exemple, voici une expérience relative à la première frange ; les données de l'expérience sont :

$$\begin{aligned} i &= 2^{\circ} 25' , \\ \alpha &= 85^{\circ} 12' , \end{aligned}$$

on calcule, par la loi de la réfraction du rayon ordinaire

$$r = 1^{\circ} 33' 52'' ;$$

dans la formule

$$d = \frac{(2p + 1) \cos r}{2e} \lambda$$

il faut prendre p , tel que d soit plus grand que la différence de marche le long de l'axe ($i = 0$), c'est-à-dire supérieure à la différence de marche due au pouvoir rotatoire seul pour 1^{cm} ; cette condition donne $p = 4$ $2p + 1 = 9$ d'où

$$d = 1,2129 \lambda .$$

Pour k on a

$$\begin{aligned} k &= tg 42^{\circ} 36' , \\ k &= 0,919 . \end{aligned}$$

(1) En effet, dans les formules (vibration $\rightarrow$)

$$\begin{aligned} \cos \pi d &= \cos u \cos \alpha , \\ tg 2\varepsilon &= \frac{tg \alpha}{\cos u} , \end{aligned}$$

il faut introduire $\alpha = 0$ et $u = k\pi$, il vient

$$\cos \pi d = \pm 1 ,$$

qui détermine la différence de marche des vibrations d'Airy, mais non leur forme.

Pour la frange suivante $p = 5 \quad 2p + 1 = 11$, etc.....

On voit défilér les franges du violet vers le rouge et on les amène successivement sur la raie D en agissant en même temps sur l'analyseur et sur le cube. On modifie ainsi l'épaisseur traversée, avec l'inclinaison sur l'axe optique. Il n'est plus exact de dire que l'on est dans les conditions même où on a établi les formules, car les ondes à l'intérieur du cristal ne sont plus parallèles, toutefois les erreurs qui en résultent sont très faibles, ainsi qu'on s'en est assuré directement. On peut calculer alors la direction des ondes réfractés par les indices du quartz.

Pour augmenter la précision des mesures, on effectuait une première mesure en inclinant le cube à droite du rayon incident, puis on cherchait la même frange en inclinant de nouveau à gauche et on revenait à la même frange en inclinant de nouveau à droite. Dans chaque opération, on effectuait plusieurs mesures, en général quatre, elles étaient toujours très concordantes. On déterminait le O du limbe, correspondant à l'incidence normale du rayon de lumière, en faisant intervenir dans le calcul toutes les expériences de la série.

Soient $i_1 \ i_2 \ i'_1$ les lectures effectuées dans l'ordre énoncé plus haut, on prend pour lecture de la frange amenée sur la raie D, en inclinant à droite :

$$\frac{i_1 + i'_1}{2} .$$

La lecture correspondante de la même frange à gauche est :

$$i_2 .$$

Le zéro est pris égal à

$$\frac{\frac{i_1 + i'_1}{2} + i_2}{2} = \frac{i_1 + i'_1 + 2i_2}{4} .$$

Voici comme exemple une série de lectures allant de la 50^e à la 60^e frange.

	A droite i_1	A gauche i_2	A droite i_1
50°	206° 58'	152° 10'	206° 52'
51°	207° 10'	151° 54'	207° 8'
52°	207° 28'	151° 38'	207° 24'
53°	207° 42'	151° 20'	207° 40'
54°	207° 56'	151° 6'	207° 54'
55°	208° 12'	150° 50'	208° 10'
56°	208° 26'	150° 36'	208° 27'
57°	208° 42'	150° 20'	208° 42'
58°	208° 56'	150° 6'	208° 56'
59°	209° 13'	149° 51'	209° 10'
60°	209° 27'	149° 38'	209° 26'

On obtient le 0 définitif en prenant la moyenne des valeurs $\frac{i_1 + i'_1 + 2i_2}{4}$; nous donnons ci-après le 0 déterminé ainsi pour la série de la 30° à la 40° frange.

	$\frac{i_1 + i'_1 + 2i_2}{4}$
30°	180° 2'
31°	180° 1' 45"
32°	180° 2' 15"
33°	180° 3'
34°	180° 2' 15"
35°	180° 1' 45"
36°	180° 0' 45"
37°	180° 0' 30"
38°	180° 1' 15"
39°	180° 7' 15"
40°	180° 1' 30"
Moyenne	180° 2' 12"

Telle est la division du limbe qui correspond à l'incidence normale; le cube avait été réglé de façon que cette direction devait correspondre au 180° degré du limbe. Or, outre l'erreur des lectures, les mesures ne seraient vraiment symétriques que

si le cube était parfaitement taillé normalement à l'axe ; un pareil résultat est impossible à obtenir d'une façon absolue ; néanmoins nous avons vérifié que la taille du cristal était sinon rigoureuse, du moins aussi parfaite qu'il était permis de l'espérer.

En comparant la moyenne du résultat, à chacun des résultats partiels, on trouve que :

L'erreur moyenne d'une détermination isolée...	= 1'48"
» du résultat.....	= 0'33"
L'erreur probable d'une détermination isolée ...	= 1'13"
» du résultat.....	= 0'22"

Ainsi la direction de l'incidence normale est déterminée à moins de 30''. — Comme les franges se resserrent quand les incidences augmentent et que l'erreur faite sur la détermination de l'incidence reste constante, il en résulte que l'erreur commise ainsi sur la différence de marche va en croissant. Quand on passe de la n^{e} à la $(n+1)^{\text{e}}$ frange, cette différence varie de $\epsilon\lambda$; il est facile de chercher quelle est l'erreur introduite en admettant sur l'incidence oblique lue sur le limbe, une erreur de 2'. — Quand on passe de la 1^{re} frange $i = 2^{\circ}37'25''$ à la 2^e frange $i = 6^{\circ}39'20''$ la valeur de d varie de $1,2138\lambda$ à $1,4741\lambda$, c'est-à-dire de $0,2603\lambda$; ainsi une variation de $4^{\circ}1'55''$ (en admettant la proportionnalité) donne une variation de $0,2603$; une variation de 2' correspond dès lors à une variation de $0,0025\lambda$, donc au voisinage de 4° (incidence oblique à l'axe) une erreur de 2' faite sur la lecture du limbe se traduit par une erreur de $0,0025$. On a répété le même raisonnement pour l'intervalle de la 5^e à la 6^e, de la 26^e à la 27^e et de la 59^e à la 60^e ; on a ainsi trouvé que :

Au voisinage de	4°	l'erreur de 2' entraîne une erreur de	$0,0025$
»	10°	»	$0,011$
»	20°	»	$0,024$
»	30°	»	$0,048$

Ainsi l'erreur sur la différence de marche, provenant de l'erreur

de lecture sur l'incidence est au plus de $\frac{1}{20^e}$ de longueur d'onde en valeur absolue.

Pour l'erreur relative à l'ellipticité k on a vu que

$$\Delta\varepsilon = \frac{1}{2} \Delta z ;$$

or l'angle ε est connu à une demi-minute, ce qui sur la valeur de $k = tg\varepsilon$ entraîne une erreur variable d'environ 0,0005 à 0,0002, c'est-à-dire en moyenne une erreur de $\frac{1}{2000}$ au plus.

CHAPITRE III

ÉTUDE DES LAMES DE QUARTZ (ORIENTATION DE L'AXE OPTIQUE ET ÉPAISSEURS DES LAMES). VÉRIFICATION DU MICA QUART D'ONDE.

Ce chapitre a un double objet : 1° Etudier d'abord les lames cristallines, tant au point de vue de l'épaisseur que de l'orientation de l'axe optique, car une taille parfaite étant impossible à réaliser il convient de déterminer la direction axiale qui se confond approximativement, mais non rigoureusement avec la normale aux faces cristallines, les lames étant supposées taillées normalement à l'axe; 2° Il faut aussi vérifier si la différence de marche qu'introduit le mica compensateur est bien d'un quart d'onde pour la raie D, ainsi que nous l'avons admis; disons immédiatement que cette condition se trouve réalisée et qu'il n'y a par suite, à ce point de vue, aucune correction à introduire.

I. — ORIENTATION DE L'AXE OPTIQUE.

Pour étudier le phénomène de la double réfraction elliptique du quartz, on s'est servi d'un certain nombre de lames; celle avec laquelle on a effectué le plus de mesures a la forme d'un cube épais d'environ 4 centimètres de côté ($3^{\text{cm}},7087$), les faces en sont définies de la façon suivante : trois des faces qui aboutissent à un même sommet portent des points de repère tracés à l'encre de Chine et numérotés 1, 2, 3; la face parallèle à la face I est dite face VI; de

même à la face II correspond la face V ; enfin le troisième couple est constitué par les faces III et IV. On a donc les couples de faces :

Couple I-VI ; couple III-V ; couple III-IV.

Le cube était placé de façon à ce que le rayon de lumière polarisée rectilignement, tombât normalement au système de faces I-VI et se propageât suivant la direction de l'axe optique Ox , le cube étant supposé exactement taillé.

En faisant tourner le cube autour de Oy (normal au couple II-V) on opérât sur trois franges d'interférences, d'abord en inclinant à droite, ensuite à gauche sur le rayon de lumière, et en cherchant les inclinaisons qui rétablissent la polarisation primitive.

Ces franges d'interférences sont observées au moyen de la méthode déjà exposée qui consiste à agir successivement sur le cube et l'analyseur ; on peut plus simplement mettre le polariseur et l'analyseur en croix, supprimer le mica quart d'onde, et incliner seulement le cube de quartz, de façon à amener sur la raie D, une première frange puis une seconde, etc...

Si le cube était exactement taillé, il reviendrait au même d'incliner à droite ou à gauche sur la lumière incidente. les mesures devraient être symétriques par rapport à la direction qui correspond à l'incidence normale ; il n'en est pas absolument ainsi.

En opérant sur les trois premières franges on a ainsi trouvé :

	1 ^{re} frange.	2 ^e frange.	3 ^e frange.
A droite	185°52'30"	187°42'	188°53'30"
A gauche	174°29'30"	172°43'30"	171°32'

Avec ces données, on peut construire une courbe parabolique (*fig. 7*) en portant sur l'axe Ox des abeisses, les lectures angulaires précédentes et en ordonnées des longueurs arbitraires prises égales à 1 unité, 2 unités, 3 unités. On peut faire passer une parabole par ces six points ; il est important de déterminer l'axe de symétrie de cette courbe ; on peut joindre le milieu des diamètres AB, A'B', A''B'', ou encore, ce qui est préférable, déterminer analytiquement et graphiquement les éléments de la parabole, les quatre points

A B A' B' suffisent pour effectuer cette détermination. Joignons AA' et BB' qui se rencontrent en O' et prenons comme axes de coordonnées ces nouvelles directions ; l'équation de la parabole est

$$(y - mx)^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 ,$$

soient

$$\begin{aligned} o'A &= a & o'B &= b , \\ o'A' &= a' & o'B' &= b' . \end{aligned}$$

En prenant du papier quadrillé, on a représenté 1^o par 3^{cm}, ce qui fait que une petite division représente 2'. On a pris comme unité arbitraire des ordonnées la valeur de $A\alpha = 10^{\text{cm}}$ et par suite $A'\alpha' = 20^{\text{cm}}$ qui correspond à la mesure relative à la seconde frange, Avec de pareilles unités on a

$$\begin{aligned} a &= 353^{\text{mm}} & b &= 349^{\text{mm}} \\ a' &= 466^{\text{mm}} & b' &= 451^{\text{mm}} ; \end{aligned}$$

on trouve facilement les relations suivantes :

$$\begin{aligned} a + a' &= -\frac{2D}{m^2} & aa' &= \frac{F}{m^2} \\ b + b' &= -2E & bb' &= F \\ m &= \sqrt{\frac{bb'}{aa'}} . \end{aligned}$$

On en déduit l'équation

$$(y - 1,011x)^2 - 837,34x - 810y + 160889 = 0 ,$$

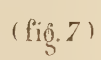
et les coordonnées du sommet sont

$$\begin{aligned} x_1 &= o'M = 97,66 , \\ y_1 &= o'M' = 98,75 , \end{aligned}$$

ce qui détermine le sommet S de la parabole, l'axe a pour équation

$$y = 1,011x ,$$

et est par suite déterminé, puisqu'on connaît sa direction. La parabole est alors symétrique par rapport à cette droite O'N qui coupe



(fig. 7)

la ligne xx' non pas à la division 180° , ce qui devrait être avec un cube parfaitement taillé, qui donnerait des lectures absolument symétriques à droite et à gauche, mais à la division $180^\circ 6'$ (3 div. valent en effet $6'$).

Pour construire la tangente en B, on projette B en B'' et on prend $SB'' = ST$, on n'a plus qu'à joindre TB. On mène la normale BN et la longueur $B''N$ est le paramètre de la parabole ; par le point B on construit une parallèle à l'axe et par le point S une perpendiculaire à l'axe et on a la tangente au sommet ; la direction de BT et de $B\beta$ permettent de faire l'angle FBT égal à $TB\beta$ ce qui donne le foyer de la parabole ; on détermine facilement la direction DD et on peut obtenir autant de points de la parabole qu'il est nécessaire pour la construire avec exactitude ; mais pour le but que nous avons en vue, la détermination exacte du sommet S est seule nécessaire. La courbe ainsi construite sur une grande échelle, a été réduite par la photographie. (*Fig. 7.*)

Cela posé, considérons la direction normale au couple de faces I-VI, qui coïncide approximativement avec l'axe optique du cristal et prenons cette direction comme axe OX ; de même soient OY et OZ les perpendiculaires aux couples de faces II-V et III-IV.

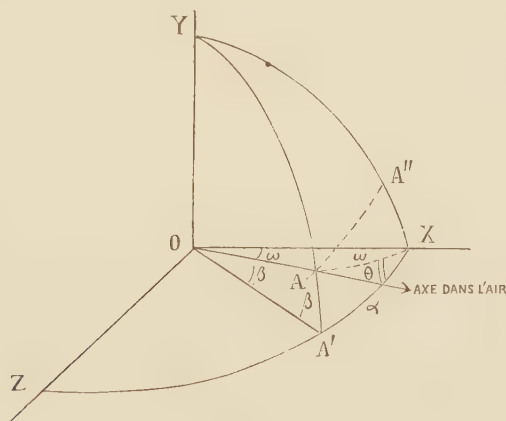


Fig. 8.

Dans la première série d'expériences, relatives à la correction de l'axe, le plan d'incidence de la lumière est le plan XOZ qui repose

sur la plateforme du limbe ; l'axe optique, dans l'air, étant dirigé non suivant OX mais suivant OA, les mesures effectuées, en faisant tourner le cube autour de OY tantôt vers la droite, tantôt vers la gauche, sont symétriques par rapport à OA' projection de l'axe OA sur le plan d'incidence. La direction de OA' fait avec OX un angle $\alpha = 6'$ ainsi qu'il résulte de ce qui précède.

On doit alors, pour déterminer OA, faire une autre série de mesures. A cet effet, le cube repose sur la plateforme par la face XOY. On fait tourner autour de OZ, d'abord à droite, ensuite à gauche, et on relève successivement trois franges d'interférences de chaque côté. Les mesures sont symétriques par rapport à OA'' projection de l'axe sur le plan d'incidence XOY ; la construction d'une nouvelle parabole donne de même l'angle de OA'' avec OX ; on trouve pour cet angle β la valeur de $3'$ seulement ; on voit que à $3'$ près le plan XOZ contient l'axe.

On a en définitive, pour déterminer l'axe OA dans l'air, les données suivantes

$$\text{XOA}' = \alpha = 6'$$

$$\text{XOA}'' = \beta = 3'$$

soient ω l'angle AOX que fait l'axe dans l'air avec la normale aux faces I-VI et θ l'angle du plan AOX avec le plan XOZ, on a dans le triangle sphérique XAA'

$$(1) \quad \cos \omega = \cos \beta \cdot \cos \alpha$$

d'où

$$\omega = 6'50''.$$

On en déduit la direction de l'axe dans l'intérieur du cristal en appliquant la loi de la réfraction ordinaire soit ω' l'angle que fait la direction de l'axe dans le cristal avec la direction OX, on a

$$\sin \omega = n \sin \omega',$$

d'où en prenant pour n l'indice ordinaire du quartz par la raie D, on tire

$$\omega' = 4'25''.$$

Pour déterminer l'angle θ , le triangle sphérique déjà considéré donne la relation

$$(2) \quad \cos \beta = \cos \omega \cdot \cos \alpha + \sin \omega \sin \alpha \cos \theta ,$$

d'où en tenant compte de (1)

$$\cos \theta = \frac{\cos \beta \cdot \sin \alpha}{\sin \omega} ,$$

qui donne pour la valeur de $\theta = 28^{\circ}35'30''$ ⁽¹⁾.

Il est dès lors facile de calculer l'erreur introduite par suite du défaut d'orientation de l'axe.

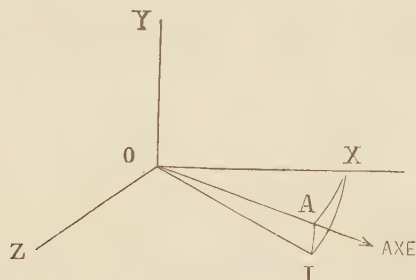


Fig. 9.

Soit OI la direction du rayon incident, dans le plan d'incidence XOZ , l'angle i que nous avons désigné ainsi est l'angle du rayon incident et de l'axe $i = AOI$, tandis que la lecture angulaire effectuée sur le limbe gradué, le cristal étant d'abord réglé pour l'incidence normale OX , est l'angle $i' = IOX$, ainsi dans les formules qui servent au calcul de la différence de marche des vibrations elliptiques ⁽²⁾, on a fait entrer comme donnée expérimentale l'angle i' , tandis que

(1) Si l'on considère le triangle XAA' comme rectiligne, on peut déduire une valeur approchée de θ , on a :

$$\alpha = \omega \cdot \cos \theta \quad \cos \theta = \frac{\alpha}{\omega} \quad \theta = 28^{\circ}32'20'' .$$

(2) Voir le calcul dans le chapitre suivant.

en toute rigueur il faut introduire l'angle i ; on a entre ces deux angles la relation suivante que donne le triangle sphérique IAX,

$$\cos i = \cos i' \cos \omega + \sin i' \sin \omega \cdot \cos \theta .$$

Désignons par r et r' les angles de réfraction correspondant à i et i' , obtenus par la loi de double réfraction ordinaire, on peut en se donnant $i' = 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ$ chercher les valeurs correspondantes de i , r et r' . On a ainsi le tableau suivant :

i' Angle du rayon incident et de la normale	r' Angle de réfraction correspondant	i Angle du rayon incident et de l'axe optique dans l'air	r Angle de réfraction correspondant
10°	6° 27' 25"	9° 54'	6° 23' 30"
20°	12° 47' 50"	19° 52' 10"	12° 42' 50"
30°	18° 53' 30"	29° 54'	18° 50'

On voit d'après ce tableau que l'angle i' lu sur le limbe diffère d'environ 6' minutes de l'angle i qu'il faudrait considérer en toute rigueur; l'angle introduit dans les formules relatives aux différences de marche est donc trop fort de cette quantité et il en résulte pour la différence de marche ainsi calculée une valeur légèrement trop grande. On constate de plus que r et r' présentent un écart d'environ 4' minutes et que, de plus, lorsque l'incidence croît les valeurs de r et de r' sont de plus en plus voisines; en d'autres termes, il revient au même pour les incidences un peu élevées ($> 30^\circ$ par exemple) de prendre comme angle de réfraction r ou r' pour effectuer le calcul des différences de marche. On peut se rendre compte de l'erreur introduite par l'inexacte orientation de l'axe en effectuant ce calcul, d'abord avec les données expérimentales i' et r' ensuite avec les données corrigées i et r ; soit d' et d les valeurs ainsi trouvées pour la différence de marche des vibrations elliptiques, l'erreur absolue est donnée par $d'-d$ qui

est positif, et l'erreur relative par $\frac{d'-d}{d}$; le tableau suivant donne les résultats de cette comparaison.

i'	d' en longueur d'onde, pour D	$d' - d$	$\frac{d' - d}{d}$
10°	2,29	+ 0 ^λ ,025	0,012
20°	7,62	+ 0 ^λ ,060	0,008
30°	15,95	+ 0 ^λ ,120	0,007

On voit que l'erreur relative va en diminuant, ce qui se comprend, car r et r' tendent vers la même valeur, tandis que l'erreur absolue, négligeable tout d'abord, peut atteindre $\frac{1}{10}$ de longueur d'onde pour $i > 30^\circ$. Cela tient à ce que, au fur et à mesure que l'incidence augmente, les franges sont de plus en plus serrées; or, quand on passe d'une frange à la suivante, les différences de marche varient toujours de la même quantité, une même erreur sur l'angle i introduit donc une erreur de plus en plus grande sur la différence de marche, mais, en valeur relative, l'erreur est de plus en plus petite.

Avec le cube de quartz l'incidence de 32° n'a pas été dépassée, car pour les dernières mesures, on ne peut répondre que $\frac{1}{10}$ de longueur d'onde environ; du reste, pour les incidences plus grandes, le phénomène perd de son importance au point de vue de la forme des vibrations elliptiques qui sont presque rectilignes.

Indépendamment du gros cube, on a employé deux lames taillées normalement à l'axe optique d'épaisseurs différentes; elles sont désignées par L_1 et L_2 .

$$\begin{aligned} L_1 &= 0^{\text{mm}},899 \text{ ,} \\ L_2 &= 0^{\text{mm}},598 \text{ .} \end{aligned}$$

Il n'a pas été possible de déterminer la position vraie de l'axe,

mais seulement sa projection sur le plan d'incidence ; les mesures effectuées à droite et à gauche de l'incidence normale ont toujours été très symétriques surtout pour la lame L_1 qui est taillée aussi exactement qu'il est possible de l'espérer ; l'incidence normale étant réglée pour 261° , voici par exemple une expérience relative à la mesure des deux premières franges.

	Lame L_1		
	A droite.	A gauche.	Zéro.
1 ^{re} frange.....	269°	253° 40'	261° 20'
2 ^e frange.....	272° 38'	250° 3'	261° 20' 30"

C'est cette lame qui a servi pour les incidences supérieures à 30° ; on a atteint l'incidence de 58° environ.

L'observation des spirales d'Airy, en plaçant le quartz sur le Norremberg, a montré qu'elles étaient bien nettes et que la lame était par suite exactement taillée ; la lame L_2 l'est moins que la lame L_1 ; néanmoins la normale au cristal coïncide très approximativement avec l'axe optique ; cette lame L_2 a été employée pour l'étude de la compression du quartz, où la précision des mesures est moindre, en sorte que l'orientation de l'axe était suffisamment définie, par la normale à la lame, en vue du but poursuivi.

II. — MESURE DES ÉPAISSEURS DES LAMES.

La connaissance exacte des épaisseurs des lames étudiées, est un élément important du problème.

Cette mesure a été effectuée au moyen du sphéromètre de Brunner, appartenant à la Faculté des Sciences, en utilisant la méthode de mesures absolues, décrite par M. Macé de Lépinay (1) ; le parallélisme et la planéité des faces du cube ont été étudiés par

(1) *Journal de Physique*, 2^e série, t. VII, 1888.

les procédés connus, et on a trouvé ainsi pour l'épaisseur moyenne et l'épaisseur centrale du cube à 0° :

$$E_m^{\circ} = 3^{\text{cm}}, 70855$$

$$E_c^{\circ} = 3^{\text{cm}}, 70870$$

On a de même pour les lames L_1 et L_2 les épaisseurs suivantes :

$$L_1 = 0^{\text{cm}}, 899311$$

$$L_2 = 0^{\text{cm}}, 598174$$

On a encore déterminé l'épaisseur d'un petit prisme droit à base de parallélogramme projeté en ABCD, laquelle base contient l'axe optique dirigé suivant AC et BD.

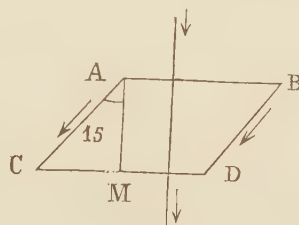


Fig. 10.

Cette direction axiale fait un angle de 15° avec la normale aux faces AB et CD ; ce prisme de quartz, dans l'expérience de contrôle pour laquelle il a été taillé, était traversé par un rayon lumineux suivant AM, c'est-à-dire dans une direction inclinée de 15° sur l'axe optique. On avait alors deux ondes lumineuses qui se propageaient avec des vitesses différentes, *suivant la même direction*, à 15° de l'axe du cristal. L'épaisseur du prisme qu'il faut considérer est donc AM ; on a trouvé, en désignant par L_3 , cette troisième lame :

$$L_3 = 1^{\text{cm}}, 54873 .$$

Les épaisseurs des lames varient avec la température ; il convient

d'en tenir compte ; pour les lames de quartz, *taillées normalement à l'axe optique*, on a appliqué la formule de M. Benoît (1) :

$$E_t = E_o \left[1 + 10^{-9} (7110,7 + 8,56 t) \right].$$

III. — VÉRIFICATION DU MICA QUART D'ONDE.

On a gradué le mica en produisant les franges d'interférence de Fizeau et Foucault entre deux Nicols croisés ou parallèles, par l'interposition, d'abord, d'une lame de quartz auxiliaire parallèle à l'axe, ensuite, par l'adjonction, au quartz, de la lame de mica placée de façon à augmenter ou à diminuer le retard.

La disposition expérimentale est la suivante (*fig. 11*).

La lumière polarisée par le Nicol P est concentrée par la lentille *l* sur la fente *f*, après avoir traversé l'analyseur A. La fente *f* est sur la circonférence d'un réseau courbe de Rowland, ayant 6 pieds de rayon (195^{cm}) et 568 traits par millimètre ; le réseau est employé avec diffraction normale pour que l'étendue utile du spectre soit tout entière au point ; on observe le spectre, au moyen de la loupe micrométrique de Fresnel.

Soit le polariseur et l'analyseur parallèles, le quartz parallèle à

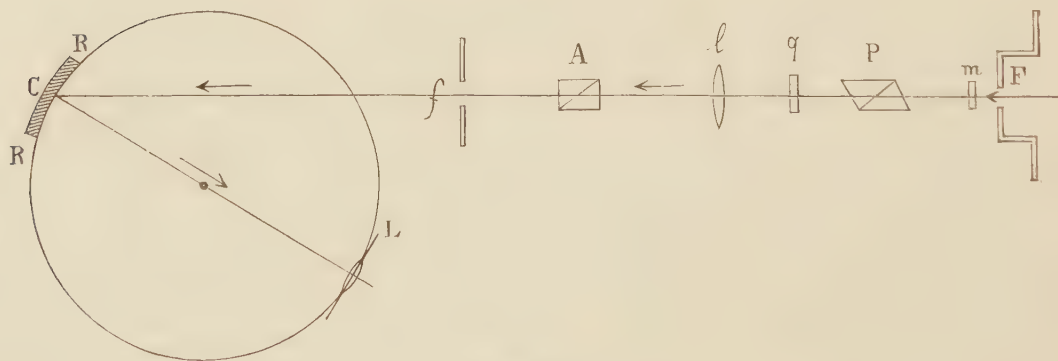


Fig. 11.

(1) Bureau International des poids et mesures, t. VI, p. 119.

l'axe q étant interposé, le spectre est sillonné de franges ; considérons les deux franges, placées de part et d'autre d'une raie connue, la raie D par exemple ; les différences de marche relatives à ces deux franges sont de la forme $(2p + 1)\frac{\lambda}{2}$ et $(2p + 3)\frac{\lambda}{2}$; la différence de marche qui correspond à la radiation D est de la forme $(2p + a)\frac{\lambda}{2}$ a n'étant point nécessairement un nombre entier ; on vise au micromètre, les deux franges et la raie D et par une interpolation rectiligne on obtient la valeur de a ; on a ainsi à $2p\frac{\lambda}{2}$ longueurs d'onde près la différence de marche introduite par la lame q pour la radiation D. On interpose alors le mica m à étudier, les franges se déplacent, on recommence la même opération pour les deux franges qui comprennent la raie D et suivant que les retards s'ajoutent ou se retranchent, on a la différence de marche due au système quartz + mica ou quartz — mica.

On en déduit facilement, celle due au mica seul.

On peut effectuer, pour augmenter la précision des mesures, une autre série d'expériences le polariseur et l'analyseur à angle droit. Voici comme exemple une double série de mesures, les distances micrométriques sont évaluées en tours et fraction de tours du tambour de la loupe de Fresnel.*

P et A parallèles.

	Différence de marche.	q seul.	Mica axe $\uparrow$	Mica axe $\rightarrow$
Frangé à gauche	$(2p + 1)\frac{\lambda}{2}$	17°476	19°395	15°443
Raie D	$(2p + a)\frac{\lambda}{2}$	20°173	20°167	20°154
Frangé à droite	$(2p + 3)\frac{\lambda}{2}$	25°308	27°288	23°133

P et A croisés.

Frangé à gauche	$2p \frac{\lambda}{2}$	13°475	15°450	19°382
Raie D	$(2p + a) \frac{\lambda}{2}$	20°160	20°182	20°169
Frangé à droite	$(2p + 2) \frac{\lambda}{2}$	21°333	23°331	27°238

On obtient ainsi, d'après les données de la première série :

{	Quartz seul	différence de marche	$(2p + 1,635) \frac{\lambda}{2}$
	Quartz — mica	»	$(2p + 1,145) \frac{\lambda}{2}$
	Quartz + mica	»	$(2p + 2,149) \frac{\lambda}{2}$

On en déduit, pour la différence de marche introduite par le mica pour la raie D, les deux valeurs

$$0,490 \frac{\lambda}{2},$$

$$0,514 \frac{\lambda}{2},$$

dont la valeur moyenne est

$$0,502 \frac{\lambda}{2}.$$

En utilisant les éléments de calcul de la 2^{me} série, on trouve, comme moyenne, la valeur exacte de

$$0,500 \frac{\lambda}{2}.$$

On peut donc, en toute rigueur, regarder le mica quart d'onde, comme exactement quart d'onde pour la raie D; on a, de même, déterminé la valeur de ce mica pour d'autres radiations. On a ainsi :

	c	D_2	b_1	F
2 ^e série	0,469	0,500	0,572	0,608
1 ^{re} série	0,474	0,502	0,592	0,595

Pour voir si la dispersion du mica est appréciable, on a effectué le produit de la différence de marche par la moitié de la longueur d'onde correspondante ; on a trouvé les produits :

	c	D_2	b_1	F
2 ^e série	3,078	2,945	2,965	2,956
1 ^{re} série	3,110	2,957	3,068	2,891

En admettant la valeur moyenne de ce produit sensiblement constant, on peut, dès lors, trouver la différence de marche du mica pour n'importe quelle radiation. Comme ce produit ne se trouve pas absolument constant, pour examiner de plus près si la dispersion n'est pas négligeable, on a étudié, de la même façon, un mica onde.

On a trouvé ainsi :

	B	c	D_2	b	F
Différence de marche .	1,676	1,713	1,957	2,211	2,219
Produit	11,61	11,24	11,53	11,46	10,79

Le produit est constant aux erreurs inévitables de l'expérience, et si la dispersion est négligeable pour un mica onde, elle l'est à *fortiori* pour un mica quart d'onde.

CHAPITRE IV

THÉORIE DE M. GOUY.

La théorie de M. Gouy, consiste à envisager la double réfraction elliptique du quartz, dans une direction oblique à l'axe, comme provenant de la superposition des effets simultanés du pouvoir rotatoire seul, et de la double réfraction holoédrique seule. C'est une théorie cinématique où, au lieu de regarder les vibrations elliptiques d'Airy, comme ayant par elles-mêmes une existence propre, on les considère comme provenant de la composition de deux effets différents, coexistant dans le quartz, à savoir le pouvoir rotatoire et la double réfraction. Ce sont ces deux phénomènes qui agissent à chaque instant, sur la molécule d'éther, et engendrent des vibrations elliptiques qui se déforment successivement à moins qu'elles n'aient des formes particulières, et constituent ainsi ce que M. Gouy a appelé des vibrations privilégiées. Celles-ci sont capables de se propager, sans altération de forme et d'orientation mais avec des vitesses différentes, suivant toute direction oblique à l'axe, et ne diffèrent en rien des vibrations elliptiques d'Airy, dont la théorie de M. Gouy permet de comprendre dès lors l'existence et la formation (1). Soit une vibration lumineuse elliptique, tombant normalement sur une lame de quartz oblique à l'axe, après un certain trajet dans le cristal, sous l'influence de la double réfraction seule, elle a subi une double modification, à savoir une rotation des axes de l'ellipse vibratoire et une déformation de ces mêmes axes. Pendant ce même trajet si on admet le principe de l'indépendance des effets simultanés, le pouvoir

(1) GOUY. — Sur les effets simultanés du pouvoir rotatoire et de la double réfraction. *Journal de Physique*, 2^e série, t. IV, 1885, p. 149.

rotatoire fait tourner l'ellipse sans la déformer, de telle sorte que la modification définitive éprouvée par la vibration elliptique incidente est une déformation et une rotation de ses axes.

Pour que la vibration se propage sans altération, c'est-à-dire pour qu'elle soit privilégiée, il faut que ces modifications soient constamment nulles, et pour qu'il en soit ainsi il faut qu'elle remplisse les conditions suivantes :

1° Les axes de la vibration doivent être contenus dans les plans principaux de la lame (section principale et section perpendiculaire à la section principale).

2° Si l'on désigne par $\frac{\omega}{\pi}$ la différence de marche due au pouvoir rotatoire seul, pour une épaisseur unité, c'est-à-dire la différence de marche entre les vibrations circulaires de Fresnel, et par φ la différence de marche introduite pour la même épaisseur, par la double réfraction holoédrique, le rapport k des axes de la vibration privilégiée doit être égal à

$$(1) \quad k = -h \pm \sqrt{1 - h^2}$$

en posant

$$h = \frac{\pi\varphi}{\omega},$$

ce qui donne *deux ellipses semblables*, dont les axes correspondants sont à angle droit, dans les plans principaux de la lame (on retrouve ainsi dans les vibrations privilégiées de Gouy les vibrations elliptiques d'Airy).

Ces vibrations se propageant avec des vitesses différentes, il faut donc exprimer la différence de marche de ces deux vibrations en fonction de $\frac{\omega}{\pi}$ et de φ .

Cette différence de marche (pour une épaisseur unité) est donnée par la formule

$$(2) \quad d^2 = \varphi^2 + \frac{\omega^2}{\pi^2},$$

c'est-à-dire que le carré de la différence de marche des vibrations privilégiées est la somme des carrés des différences de marche que

produiraient la double réfraction seule entre les vibrations rectilignes et le pouvoir rotatoire seul entre les vibrations circulaires. La vibration privilégiée qui prend l'avance est celle sur laquelle le mouvement vibratoire est de même sens que le pouvoir rotatoire du milieu.

Ce sont les formules (1) et (2) qui ont été employées pour trouver la forme et la différence de marche des vibrations elliptiques ; ces résultats calculés ont été comparés à ceux déduits de l'expérience, ainsi qu'il a été dit dans le chapitre précédent. Le calcul de $\frac{\omega}{\pi}$ ne présente aucune difficulté, ω étant la rotation du plan de polarisation pour une épaisseur unité de quartz ; mais à cause de la biréfringence, quelques remarques sont nécessaires sur la manière dont le calcul de φ a été effectué.

PREMIÈRE PARTIE.

Différence de marche des vibrations.

Calcul de l'effet dû à la double réfraction. — Pour les faibles incidences, où la séparation du rayon ordinaire et du rayon extraordinaire est négligeable, la différence de marche due la double réfraction, exprimée en longueur d'onde, est donnée par :

$$(2) \quad \varphi\lambda = (n' - n) \sin r \operatorname{tg} r ,$$

r étant l'angle de réfraction avec l'axe optique du cristal considéré comme normal à la lame cristalline. On peut du reste tenir compte de la séparation des rayons et de la différence de marche introduite par le trajet dans l'air, quoique dans nos expériences, la plus grande valeur de $r - r'$ (en désignant par r et r' les angles des normales aux ondes ordinaire et extraordinaire avec la normale à la lame), n'ait pas dépassé $1'$.

Pour apprécier la valeur de cette séparation, voici quelques résultats relatifs à un certain nombre de franges.

NUMÉRO D'ORDRE	i	$r - r'$
1 ^{re} frange	2° 37' 25"	0' 0",02
30° —	21° 32' 39"	0' 10",6
60° —	30° 16'	0' 45"
70° —	32° 21'	0' 54"

Les expériences précédentes ont été effectuées avec le cube de quartz de 4^{cm} d'épaisseur environ. On a aussi opéré avec une lame ayant une épaisseur d'à peu près 1^{cm}, et la plus haute incidence sous laquelle on a fait une mesure est 57° 54' 30" atteinte par la 50^e frange, pour laquelle $r - r' = 3' 57''$.

On calcule alors φ par la relation suivante

$$(4) \quad \varphi \lambda = e \sin i (\cotg r' - \cotg r)$$

qu'il est facile d'établir (1).

(1) Soit SI le rayon incident, et IR, IR' les normales aux ondes ordinaire et

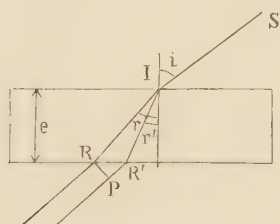


Fig. 1.

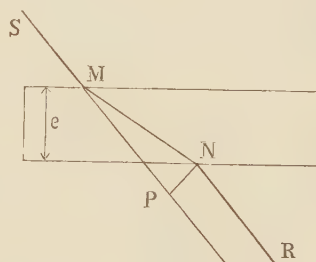


Fig. 2.

extraordinaire. La différence des chemins optiques ramenés à l'air est égale à

$$\frac{\sin i}{\sin r} \cdot \frac{e}{\cos r} - \frac{\sin i}{\sin r'} \cdot \frac{e}{\cos r'} = e \sin i (tgr - tgr')$$

qui après simplification donne la relation cherchée. On peut aussi (fig. 2) l'établir par la considération des ondes planes. Soient MS, l'onde incidente, MN l'une des

Pour ramener à l'épaisseur unité, il ne suffit pas de diviser par e mais par $\frac{e}{\cos r}$ qui est l'épaisseur réellement traversée, on a alors pour φ la rotation

$$(5) \quad \varphi = \frac{\sin i (\cotg r' - \cotg r) \cos r}{\lambda}$$

ou

$$(6) \quad \varphi = \frac{n \sin i \sin (r - r') \cos r}{\lambda \sin r'} ;$$

on calcule l'angle r par la loi de la double réfraction ordinaire

$$(7) \quad \sin r = \frac{\sin i}{n} .$$

Pour l'angle r' on a la relation connue

$$\frac{\sin^2 r'}{\sin^2 i} = \frac{1}{n^2} \cos^2 r' + \frac{1}{n'^2} \sin^2 r' ,$$

d'où

$$(8) \quad \sin^2 r' = \frac{n'^2 \sin^2 i}{n^2 n'^2 + (n'^2 - n^2) \sin^2 i} ;$$

les relations (7) et (8) déterminent r et r' et la formule (6) donne la différence de marche due à la double réfraction seule.

ondes dans le quartz, NR l'onde émergente, PN le retard de l'onde émergente sur l'onde incidente, est égal à

$$PN = e \frac{\sin (i - r)}{\sin r} = \frac{e}{\sin r} (\sin i \cos r - \cos i \sin r) ;$$

de même le retard de l'autre onde, sur l'onde incidente serait

$$P'N' = \frac{e}{\sin r'} (\sin i \cos r' - \cos i \sin r')$$

et le retard des deux ondes entr'elles est la différence $P'N' - PN$

$$\varphi \lambda = e \sin i (\cotg r' - \cotg r).$$

La longueur d'onde λ est relative à la raie D (1).

En opérant ainsi qu'il a été dit, c'est-à-dire en inclinant plus ou moins le cristal sur le rayon de lumière incidente, les ondes à l'intérieur du cristal ne sont plus parallèles, et il n'est plus exact de dire que sur ces deux ondes les vibrations, sont les vibrations conjuguées d'Airy.

A la sortie, la vibration ne conserve plus exactement la forme qu'elle avait à l'intérieur du cristal, mais les erreurs introduites sont très faibles, tant que l'on ne s'écarte pas beaucoup de la normale à la lame, c'est-à-dire de l'axe optique, le cristal étant taillé normalement à cette dernière direction. Il n'y a du reste pas avantage à opérer sous des incidences trop grandes, le phénomène perdant de l'importance et de la netteté.

On peut alors calculer, ainsi qu'il a été fait, la direction des ondes réfractées par la considération de l'onde ordinaire et de l'onde extraordinaire, que l'on aurait en l'absence du pouvoir rotatoire, et pour de pareilles directions calculer l'effet dû à la birefringence seule. En toute rigueur r et r' exigeraient pour être connus, la connaissance des indices elliptiques du quartz pour chaque direction.

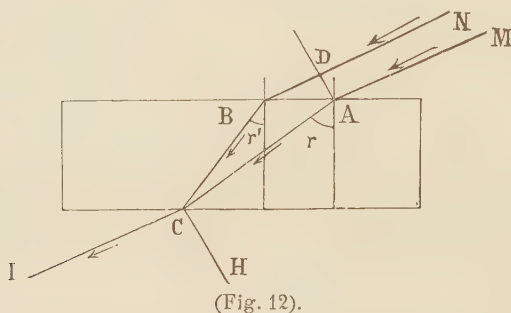
Pour quelques expériences on a effectué le calcul complet de la manière suivante. Soit le rayon incident IC qui donne à l'intérieur deux ondes dont les normales sont CB et CA faisant avec la normale

(1) Voici quelques résultats où la différence de marche a été divisée par e ou par $\frac{e}{\cos r}$ pour ramener à l'unité d'épaisseur :

	différence de marche e	différence de marche $\frac{e}{\cos r}$
$i = 2^{\circ}50'$	1,214	1,214
$i = 9^{\circ}17'$	1,964	1,957
$i = 12^{\circ}50'$	3,416	3,386
$i = 14^{\circ}22'$	4,178	4,128
$i = 17^{\circ}42'$	6,172	6,056
$i = 24^{\circ}22'45''$	11,446	11,035

Les deux modes de calcul présentent un écart notable.

à la lame les angles r' et r , AD est l'onde émergente. Inversement on peut considérer les rayons AM et BN ; chacun d'eux donne une onde ordinaire et extraordinaire, l'onde ordinaire de AM se propage suivant AC, l'onde extraordinaire de BN, se propage sui-



vant BC, et à l'émergence on a l'onde CH. On peut aussi considérer comme se propageant suivant AC, les deux ondes elliptiques d'Airy, et de même suivant BC, deux autres ondes elliptiques, et regarder l'onde émergente CH comme résultant de l'interférence de ces quatre ondes.

Soit la vibration en A

$$(9) \quad x = \sin 2\pi \frac{t}{T}$$

et la vibration en B

$$(10) \quad x = \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\rho}{\lambda} \right)$$

en retard sur la vibration en A, à cause du chemin BD dans l'air.

La vibration (9) est équivalente aux deux elliptiques :

$$(11) \quad \begin{cases} x = \frac{1}{1+k^2} \sin 2\pi \frac{t}{T} \\ y = \frac{k}{1+k^2} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{1}{4} \right) \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{k^2}{1+k^2} \sin 2\pi \frac{t}{T} \\ y = \frac{k}{1+k^2} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{1}{4} \right) \end{cases}$$

De même la vibration (10) est équivalente au système :

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \nearrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{1+k^2} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\rho}{\lambda} \right) \\ y = \frac{k}{1+k^2} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\rho}{\lambda} + \frac{1}{4} \right) \end{array} \right. \\ \searrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{k^2}{1+k^2} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\rho}{\lambda} \right) \\ y = \frac{k}{1+k^2} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\rho}{\lambda} - \frac{1}{4} \right) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

strictement il faudrait k' au lieu de k , la forme des ellipses n'étant pas la même.

A l'émergence, si on désigne par V' et V'' les vitesses de propagation des deux elliptiques, par T la durée de la vibration de la radiation considérée, les systèmes deviennent

$$(11') \quad \left\{ \begin{array}{l} \nearrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{1+k^2} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{e}{\cos r' \cdot \theta V'_1} \right) \\ y = \frac{k}{1+k^2} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{1}{4} - \frac{e}{\cos r' \cdot \theta V'_1} \right) \end{array} \right. \\ \searrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{k^2}{1+k^2} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{e}{\cos r' \cdot \theta V''_1} \right) \\ y = \frac{k}{1+k^2} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{1}{4} - \frac{e}{\cos r' \cdot \theta V''_1} \right) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$(12') \quad \left\{ \begin{array}{l} \nearrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{1+k^2} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\rho}{\lambda} - \frac{e}{\cos r' \cdot \theta V'_2} \right) \\ y = \frac{k}{1+k^2} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\rho}{\lambda} + \frac{1}{4} - \frac{e}{\cos r' \cdot \theta V'_2} \right) \end{array} \right. \\ \searrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{k^2}{1+k^2} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\rho}{\lambda} - \frac{e}{\cos r' \cdot \theta V''_2} \right) \\ y = \frac{k}{1+k^2} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\rho}{\lambda} - \frac{1}{4} - \frac{e}{\cos r' \cdot \theta V''_2} \right) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Dans ces équations V' représente la vitesse de l'onde elliptique droite $\nearrow$ et V'' celle de l'elliptique $\searrow$ gauche. Les indices 1 et 2 sont relatifs aux directions AC et BC.

Si on pose

$$\frac{e}{\cos r} \left(\frac{1}{\theta V'_1} - \frac{1}{\theta V''_1} \right) = \delta_1$$

$$\frac{e}{\cos r'} \left(\frac{1}{\theta V'_2} - \frac{1}{\theta V''_2} \right) = \delta_2$$

l'écriture se simplifie et on a :

$$(11'') \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{1+k^2} \sin 2\pi \frac{t}{T} \\ y = \frac{k}{1+k^2} \cos 2\pi \frac{t}{T} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{k^2}{1+k^2} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \delta_1 \right) \\ y = \frac{-k}{1+k^2} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} + \delta_1 \right) \end{array} \right.$$

$$(12'') \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{1+k^2} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\rho}{\lambda} \right) \\ y = \frac{k}{1+k^2} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\rho}{\lambda} \right) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{k^2}{1+k^2} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\rho}{\lambda} + \delta_2 \right) \\ y = \frac{-k}{1+k^2} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\rho}{\lambda} + \delta_2 \right) \end{array} \right.$$

Le système (11'') donne une ellipse résultant de l'interférence des deux elliptiques d'Airy, dont l'équation est :

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} X = a \sin \left(2\pi \frac{t}{T} + \psi \right) \\ Y = b \sin \left(2\pi \frac{t}{T} + \psi' \right) \end{array} \right.$$

avec les équations de condition

$$a^2 = 1 - \frac{4k^2}{(1+k^2)^2} \sin^2 \pi \delta_1 ,$$

$$b^2 = \frac{4k^2}{(1+k^2)^2} \sin^2 \pi \delta_1 ,$$

$$tg(\psi' - \psi) = tg U_1 = \frac{1 - k^2}{1 + k^2} tg \pi \delta_1 ;$$

si on pose $k = tg \epsilon$, les équations de conditions deviennent

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} a^2 = 1 - \sin^2 2\epsilon \sin^2 \pi \delta_1 , \\ b^2 = \sin^2 2\epsilon \sin^2 \pi \delta_1 , \\ tg U_1 = \cos 2\epsilon \cdot tg \pi \delta_1 . \end{array} \right.$$

Ce qui détermine l'ellipse (13).

De même on calcule l'ellipse résultante du système 12''

$$(15) \quad \begin{cases} X' = a' \sin \left(2\pi \frac{t}{T} - 2\pi \frac{\rho}{\lambda} + \psi_1 \right) \\ Y' = b' \sin \left(2\pi \frac{t}{T} - 2\pi \frac{\rho}{\lambda} + \psi'_1 \right) \end{cases}$$

en posant $U_2 = \psi'_1 - \psi_1$ on a les équations de condition :

$$(16) \quad \begin{cases} a'^2 = 1 - \sin^2 2\varepsilon \sin^2 \pi \delta_2, \\ b'^2 = \sin^2 2\varepsilon \sin^2 \pi \delta_2, \\ tg U_2 = \cos 2\varepsilon \cdot tg \pi \delta_2. \end{cases}$$

On a définitivement les deux ellipses

$$(17) \quad \begin{cases} X = a \sin 2\pi \frac{t}{T} \\ Y = b \sin \left(2\pi \frac{t}{T} + U_1 \right) \end{cases}$$

$$(18) \quad \begin{cases} X' = a' \sin \left(2\pi \frac{t}{T} - 2\pi \frac{\rho}{\lambda} \right) \\ Y' = b' \sin \left(2\pi \frac{t}{T} - 2\pi \frac{\rho}{\lambda} + U_2 \right) \end{cases}$$

qui interférant à la sortie, donnent l'ellipse émergente qui est analysée expérimentalement, dont l'équation est

$$(19) \quad \begin{cases} X = A \sin \left(2\pi \frac{t}{T} + \chi \right) \\ Y = B \sin \left(2\pi \frac{t}{T} + \chi' \right) \end{cases}$$

avec

$$(20) \quad \begin{cases} tg \chi = \frac{-a' \sin 2\pi \frac{\rho}{\lambda}}{a + a' \cos 2\pi \frac{\rho}{\lambda}} \\ tg \chi' = \frac{b \sin U_1 - b' \sin \left(2\pi \frac{\rho}{\lambda} - U_2 \right)}{b \cos U_1 + b' \cos \left(2\pi \frac{\rho}{\lambda} - U_2 \right)} \end{cases}$$

On connaît ainsi $(\chi - \chi')$ qui donne la différence de phase des

composantes principales. Dans le cas particulier étudié par la méthode expérimentale, cette phase est environ $\frac{\pi}{2}$ à la sortie du cristal, et π après le passage à travers le mica quart d'onde.

On détermine, pour effectuer le calcul, l'angle ε en appliquant la relation

$$k = tg \varepsilon = -h + \sqrt{1 + h^2}$$

avec

$$h = \frac{\pi^2}{\omega}.$$

On a alors pour comparer la théorie au calcul

$$(21) \quad \begin{cases} tg \alpha = tg 2\varepsilon \sin (\chi' - \chi) , \\ \cos \pi d = \cos \alpha \cos (\chi' - \chi) , \end{cases}$$

on en déduit α et d .

L'angle α est comparé à l'angle de polarisation rétablie donné par l'analyseur, et la différence de marche d des vibrations elliptiques est comparée à la différence de marche calculée par la relation

$$d^2 = \varphi^2 + \frac{\omega^2}{\pi^2}.$$

Voici un exemple d'un pareil calcul pour

$$i = 15^{\circ} 36' ;$$

on a

$$\begin{aligned} r &= 10^{\circ} 1' 43'' , \\ r' &= 10^{\circ} 1' 36'' ; \end{aligned}$$

la différence de marche holoédrique est donnée par

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{e \sin r \operatorname{tgr} (n' - n)}{\lambda} & \text{d'où } \varphi_1^2 &= 312,696 \\ \varphi_2 &= \frac{e \sin r' \operatorname{tgr}' (n' - n)}{\lambda} & \text{d'où } \varphi_2^2 &= 314,486 \end{aligned}$$

de même pour la différence de marche due au pouvoir rotatoire

$$\left(\frac{\omega}{\pi}\right)_1^2 = 20,6663 \qquad \left(\frac{\omega}{\pi}\right)_2^2 = 20,6660$$

que l'on obtient en prenant la valeur de $\left(\frac{\omega}{\pi}\right)$ relative à l'unité d'épaisseur, et en multipliant par $\frac{c}{\cos r}$.

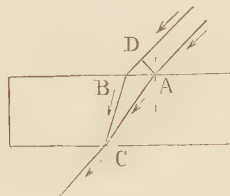


Fig. 13.

On a alors

$$\delta_1 = 18,258, \quad \delta_2 = 18,307.$$

La différence de marche introduite par le trajet BD est en longueur d'onde

$$\rho = 0,593.$$

Cherchons la valeur de $\frac{\pi\rho}{\omega}$, on trouve

$$h_1 = 3,8899, \quad h_2 = 3,8885,$$

d'où pour la valeur de k suivant CA, et suivant CB

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{1+h^2} = 4,0164 \\ h = 3,8899 \\ \hline k_1 = 0,1265 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{1+h^2} = 4,0150 \\ h = 3,8885 \\ \hline k_2 = 0,1265 \end{array} \right.$$

or,

$$k = tg\varepsilon,$$

on en déduit

$$\varepsilon = 7^\circ 16' 2'' 5,$$

$\varepsilon, \delta_1, \delta_2$ étant connus par les formules (14) et (16) permettent de déterminer a, b, U_1, a', b', U_2 . Remarquons du reste que la valeur de k est la même, suivant les deux trajets AC et BC. On a alors

$$\begin{array}{ll} a = 0,98332 & a' = 0,97860 \\ b = 0,18186 & b' = 0,20578 \\ U_1 = 45^\circ 30' 1'' 6 & U_2 = 54^\circ 12' 1'' 6 \end{array}$$

En y joignant la valeur de ρ les équations (20) donnent χ et χ' et on a :

$$\chi - \chi' = 91^{\circ} 45' 13''$$

au lieu de 90° .

La première des équations (21) donne

$$\alpha_{\text{calculé}} = 14^{\circ} 31' 51''.$$

L'observation donne pour ce même angle (angle de polarisation rétablie) la valeur de

$$\alpha_{\text{observé}} = 14^{\circ} 10'.$$

La deuxième de ces équations, permet d'obtenir la différence de marche

$$d_{\text{calculé}} = 18,490,$$

tandis que l'observation assigne à d la valeur

$$d_{\text{observé}} = 18,500.$$

Ces différences de marche sont relatives à l'épaisseur réelle traversée, si on les ramène à l'épaisseur unité (1^{cm}) il vient

$$d_{\text{calculé}} = 4,797,$$

$$d_{\text{observé}} = 4,800.$$

Le mode de calcul, généralement employé, qui consiste à calculer φ par la relation (6) qui tient compte de la séparation des rayons donne (1)

$$d_{\text{calculé}} = 4,835.$$

Expérience de contrôle. — Cette expérience a été faite avec le cube de $1^{\text{cm}} 5$ d'épaisseur taillé de façon à ce que un rayon de lumière

(1) On emploie la relation suivante, qui a servi au calcul de d :

$$d = \varphi^2 + \frac{\omega^2}{\pi^2} - \frac{n^2 \sin^2 i \sin^2 (i - i') \cos^2 i'}{\lambda^2 \sin^2 i'} + \frac{\omega^2}{\pi^2}.$$

tombant normalement sur la face d'entrée, soit incliné de 15° sur l'axe optique du cristal, cet axe étant placé dans le plan d'incidence, c'est-à-dire dans un plan horizontal, et faisant dès lors avec la normale à la face sur laquelle tombe le faisceau lumineux l'angle de 15° . Dans ce cas, les deux ondes elliptiques se propagent exactement, suivant la même direction. La première frange observée, était obtenue en inclinant le cube de $36'$ de façon à l'amener sur la raie D. Le rayon de lumière faisait par suite avec l'axe optique un angle $15^\circ 36'$. On calculait d par la relation

$$d^2 = v^2 + \frac{\omega^2}{\pi^2},$$

qui peut s'appliquer ici en toute rigueur. On a trouvé

$$d = 4,668.$$

Sur la courbe des observations faites avec le cube de 3^{cm} (taillé normalement à l'axe), sous des incidences croissantes, on a relevé par interpolation la mesure correspondante à $15^\circ 36'$ et on a trouvé :

$$d = 4,730.$$

On voit donc qu'il est à peu près équivalent d'opérer avec une même lame taillée normalement à l'axe, sous des incidences de plus en plus obliques, ou avec une série de lames taillées inégalement inclinées sur l'axe, en ayant soin que la lumière soit constamment normale à la face d'entrée de façon à éviter la séparation des ondes. En opérant avec une lame unique, il suffit d'étudier l'orientation de l'axe, tandis qu'avec des lames différentes, il faut chaque fois répéter la correction.

Le tableau suivant résume les observations faites sur quartz épais ($e = 3^{\text{cm}}$, 7) et sur la lame cristalline d'épaisseur moindre ($e = 0^{\text{cm}}, 89$). Ces observations sont relatives à la différence de

marche de vibrations privilégiées de Gouy. On compare la valeur de l'observation donnée par : (Chapitre II, p. 31).

$$d_{\text{observé}} = \frac{(2p+1) \cos r}{2e} \lambda_D \quad (1)$$

avec la valeur de d calculé par la relation déjà indiquée

$$d_{\text{calculé}} = \sqrt{\frac{n^2 \sin^2 i \sin^2 (r-r') \cos^2 r}{\lambda^2 \sin^2 r'} + \frac{\omega^2}{\pi^2}}.$$

TABLEAU A (cube de 4^{cm}).

N° d'ordre des franges	i	d obs. (1)	d calc.	Obs.-calc.
1 (2)	2° 37' 25"	1,213	1,214	— 0,001
2	6° 39' 20"	1,478	1,474	+ 0,004
3	8° 1' 57"	1,746	1,739	+ 0,007
4	9° 10' 45"	2,011	2,016	— 0,005
5	10° 1' 52"	2,277	2,291	— 0,014
6	10° 46' 15"	2,543	2,542	+ 0,001
7	11° 29' 7"	2,807	2,809	— 0,002
8	12° 16'	3,071	3,121	— 0,050
9	12° 50'	3,335	3,386	— 0,051
10	13° 24'	3,599	3,658	— 0,059
11	13° 52'	3,862	3,852	+ 0,010
12	14° 21'	4,125	4,123	+ 0,002
13	14° 47' 45"	4,388	4,347	+ 0,041
14	15° 18' 15"	4,649	4,658	— 0,009

(1) On a construit la courbe des observations en prenant pour abscisses les numéros des franges, et comme ordonnées les valeurs de d obs.; le chiffre des dixièmes était représenté par 1^{cm} et le chiffre des centièmes par 1^{mm}; les observations étaient représentées par séries de 10. Cette courbe a permis de corriger quelques observations isolées; cette correction, du reste, n'a jamais changé que une ou deux unités le chiffre des centièmes.

(2) Pour la première frange $p = 4$.

TABEAU A (cube de 4^{cm}) (*suite*).

N° d'ordre des franges	λ	d obs.	d calc.	Obs.-calc.
15	15°45'	4,910	4,880	+ 0,030
16	16°14'	5,171	5,167	+ 0,004
17	16°38'55"	5,432	5,410	+ 0,022
18	17° 3'30"	5,692	5,617	+ 0,075
19	17°28'45"	5,951	5,922	+ 0,029
20	17°55'	6,209	6,194	+ 0,015
21	18°17'	6,465	6,440	+ 0,025
22	18°40'	6,720	6,690	+ 0,030
23	19° 3'30"	6,975	6,963	+ 0,012
24	19°25'15"	7,230	7,215	+ 0,015
25	19°46'45"	7,490	7,400	+ 0,090
26	20° 8'15"	7,752	7,691	+ 0,061
27	20°29'30"	7,980	8,899	+ 0,081
28	20°49'45"	8,260	8,226	+ 0,034
29	21°10'37"	8,520	8,480	+ 0,040
30	21°32'39"	8,767	8,755	+ 0,012
31	21°55'12"	9,025	9,035	— 0,010
32	22°14'15"	9,280	9,296	— 0,016
33	22°33'48"	9,530	9,554	— 0,024
34	22°52'15"	9,785	9,774	+ 0,011
35	23°10'18"	10,035	10,026	+ 0,009
36	23°29'18"	10,285	10,299	— 0,014
37	23°48'30"	10,540	10,547	— 0,007
38	24° 5'18"	10,790	10,773	+ 0,017
39	24°24'18"	11,031	11,046	— 0,015
40	24°40'48"	11,285	11,270	+ 0,015
41	24°57'15"	11,540	11,502	+ 0,038
42	25°14'30"	11,780	11,722	+ 0,058
43	25°31'15"	12,030	12,030	± 0,000
44	25°48'30"	12,275	12,198	+ 0,077

TABLEAU A (cube de 4^{cm}) (*suite*).

N° d'ordre des franges	i	d obs.	d calc.	Obs.-cal.
45	26° 3'	12,520	12,481	+ 0,039
46	26° 16' 15"	12,770	12,716	+ 0,054
47	26° 32' 30"	13,020	12,967	+ 0,053
48	26° 56' 58"	13,265	13,251	+ 0,014
49	27° 11' 28"	13,517	13,542	— 0,025
50	27° 24' 30"	13,750	13,696	+ 0,054
51	27° 42'	14,000	13,936	+ 0,064
52	27° 56'	14,245	14,218	+ 0,027
53	28° 10' 30"	14,475	14,416	+ 0,059
54	28° 24' 30"	14,730	14,667	+ 0,063
55	28° 40' 30"	14,970	14,905	+ 0,065
56	29°	15,220	15,190	+ 0,030
57	29° 20'	15,465	15,509	— 0,044
58	29° 40'	15,710	15,785	— 0,075
59	29° 58' •	15,950	16,016	— 0,066
60	30° 16'	16,200	16,270	— 0,070
70	32° 21'	18,592	18,543	+ 0,049

Le tableau précédent indique les résultats obtenus, dans le cas où la lumière était polarisée dans un des plans principaux ; et, dans l'espèce, polarisée horizontalement. On a opéré aussi en polarisant la lumière à 45° du plan d'incidence, c'est-à-dire de la section horizontale. Le tableau suivant donne les mesures des premières franges obtenues avec le cube de 4^{cm} de côté environ. Les valeurs de la différence de marche, et de l'ellipticité des vibrations d'Airy sont données par : (chapitre II, p. 31).

$$\left\{ \begin{array}{l} d = \frac{(2p+1) \cos r}{4e} \lambda , \\ k = tg \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) . \end{array} \right.$$

TABLEAU B (cube de 4^{cm}).

N° de la frange	i	d obs.	d calc.	Obs.-calc.
1	4° 47' 15"	1,278	1,284	— 0,005
2	7° 3' 30"	1,545	1,545	± 0,000
3	8° 24' 30"	1,812	1,822	— 0,010
4	9° 16' 30"	2,078	2,061	+ 0,017

Enfin, pour obtenir des mesures effectuées sous les incidences élevées, on a opéré avec une lame de quartz de 0^{cm}89 environ (1). Le tableau suivant donne les résultats obtenus avec une pareille lame, taillée normalement à l'axe optique et progressivement inclinée sur la lumière incidente polarisée dans la section principale. On n'a mesuré que quelques franges.

TABLEAU C (lame de quartz $e = 0^{\text{cm}} 89$).

N°	i	d obs. (2)	d calc.	Obs.-cal.
1°	7° 41' 30"	1,661	1,658	+ 0,004
2°	11° 13'	2,756	2,708	+ 0,048
5°	17° 39' 10"	5,995	6,032	— 0,037
6°	19° 17' 10"	7,059	7,116	— 0,057
7°	20° 38'	8,118	8,087	+ 0,031
15°	30° 10' 30"	16,245	16,220	+ 0,025
24°	38° 26' 30"	24,936	24,952	— 0,016
50°	57° 54' 30"	46,943	46,871	+ 0,072

Il résulte de ces tableaux que dans les limites de nos expériences,

(1) Cette lame a servi ultérieurement dans les expériences de compression. Elle est très bien taillée.

(2) Pour la première frange $p = 1$; $2p + 1 = 3$;...

(c'est-à-dire depuis $r = 0$ jusqu'à $r = 33^{\circ}16'17'',7$), la théorie de M. Gouy donne des résultats qui concordent d'une façon remarquable avec ceux que donne l'observation; la fig. 14 donne, pour le gros cube, les valeurs de $d_{\text{obs}} - d_{\text{cal}}$ portées en ordonnées, les numéros d'ordre étant les abscisses.

Nous pouvons utiliser les résultats précédents (d_{obs}), pour soumettre au contrôle de l'expérience, l'hypothèse d'Airy sur la forme de la surface d'onde dans le quartz; si on désigne par d_o la différence de marche suivant l'axe, c'est-à-dire la valeur déjà désignée par $\frac{\omega}{\pi}$, la différence de marche d'après Airy est:

$$d = \varphi + \frac{\omega}{\pi},$$

c'est-à-dire égale à celle due à la double réfraction augmentée d'une quantité constante.

Pour abréger, le tableau suivant ne donne les mesures que des franges 1, 5, 10, etc.

TABLEAU D.

	i	d	D'après Airy $\varphi + \frac{\omega}{\pi}$	Sans polarisation rotatoire φ
	0°	1,2058	1,2058	0,000
1 ^e	$2^{\circ}37'15''$	1,2128	1,3265	0,1207
5 ^e	10°	2,277	3,129	1,923
10 ^e	$13^{\circ}24'$	3,599	4,659	3,453
15 ^e	$15^{\circ}45'$	4,910	5,935	4,729
20 ^e	$17^{\circ}55'$	6,209	7,281	6,075
25 ^e	$19^{\circ}46'45''$	7,490	8,507	7,301
30 ^e	$21^{\circ}32'39''$	8,765	9,878	8,672
35 ^e	$23^{\circ}10'18''$	10,035	11,201	9,995
40 ^e	$24^{\circ}40'48''$	11,285	12,412	11,206
45 ^e	$26^{\circ}3'$	12,520	13,628	12,422
50 ^e	$27^{\circ}24'30''$	13,750	14,848	13,642
55 ^e	$28^{\circ}40'30''$	14,970	16,062	14,856
60 ^e	$30^{\circ}16'$	16,200	17,568	16,362
70 ^e	$32^{\circ}21'$	18,592	19,560	18,354

L'hypothèse d'Airy est donc inexacte. La différence de marche devient rapidement la même que si la sphère et l'ellipsoïde se touchaient (3^e et dernière colonne).

DEUXIÈME PARTIE.

Forme des vibrations.

Il nous reste à étudier la forme des vibrations elliptiques dont on vient de déterminer la différence de marche. La valeur k qui définit la forme de la vibration est, d'après la théorie de M. Gouy, donnée par la formule (1) que nous rappelons

$$(1) \quad k_{\text{calc}} = -h + \sqrt{1 + h^2}.$$

D'un autre côté, en désignant par A la grandeur de l'axe horizontal, et par B celle de l'axe vertical de l'ellipse émergente (résultant de l'interférence des deux vibrations privilégiées de Gouy), on a

$$\frac{A}{B} = \operatorname{tg} \alpha$$

et l'analyse expérimentale de cette dernière ellipse, permet, d'après la position de l'analyseur, de déterminer l'angle α , et d'obtenir ensuite k par la relation (voir chapitre II).

$$(2) \quad k_{\text{obs}} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Ce sont les formules (2) et (1) qui ont servi à soumettre au contrôle de l'expérience la théorie de M. Gouy; or, si on fait la différence $k_{\text{obs}} - k_{\text{calc}}$ on constate que l'on se trouve en présence d'une erreur régulièrement croissante, et par suite présentant un caractère systématique. Il est facile d'en trouver la raison, dans la réfraction à la sortie, réfraction qui altère d'une façon inégale les axes de l'ellipse émergente. On peut évidemment appliquer au

au quartz dans ce cas, les formules trouvées par Fresnel, pour la réfraction vitreuse.

La lumière incidente est polarisée perpendiculairement au plan d'incidence, c'est-à-dire, que la vibration lumineuse est horizontale (d'après Fresnel).

La composante qui est dans la section principale a son amplitude A modifiée qui devient A' après la réfraction, et on a

$$A' = A \frac{2 \sin r \cos i}{\sin (i + r) \cos (i - r)}$$

et de même on a

$$B' = B \frac{2 \sin r \cos i}{\sin (i + r)}$$

Or, on mesure le rapport :

$$\frac{B'}{A'} = \operatorname{tg} \beta :$$

il faut en déduire le rapport :

$$\frac{B}{A} = \operatorname{tg} \alpha$$

que l'on aurait sans l'altération introduite par la réfraction à la sortie du cristal; or, on a

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos (i - r)$$

d'où

$$(3) \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\cos (i - r)} .$$

Ainsi β étant l'angle donné par l'analyseur, on en déduit l'angle α , d'après (3) et enfin on applique la relation (2) pour avoir k .

Le tableau suivant contient les résultats de nos expériences; pour abréger à partir de la 30^e frange, les valeurs des observations sont données de 10 en 10 seulement.

L'angle β est l'angle directement donné par l'analyseur et l'angle α est l'angle corrigé de la réfraction; cette correction est d'environ 4'. La première colonne du tableau donne le numéro d'ordre des

franges, on n'a pas inscrit l'incidence correspondante, il suffit pour la connaître de se reporter au tableau A.

Les mesures sont relatives au gros cube de 3^{cm},7

TABLEAU E (cube de 3^{cm},7).

N°	$i-r$	β	α	k obs.	k calc.	Obs.- calc.
1	0°55'31"	84° 5'34"	84° 5'35"	0,902	0,900	+ 0,002
2	2°21' 5"	54°54'35"	54°56'	0,519	0,515	+ 0,004
3	2°50'28"	42°14'	42°16' 4"	0,387	0,402	— 0,015
4	3°15'	34°45'	34°47'35"	0,313	0,332	— 0,019
5	3°33'17"	29°40'	29°42'50"	0,265	0,274	— 0,009
6	3°49'13"	25°22'30"	25°25'30"	0,225	0,251	— 0,026
7	4° 4'35"	23°42'30"	23°46'	0,210	0,225	— 0,015
8	4'21'32"	20°45'	20°48'20"	0,184	0,201	— 0,017
9	4°33'50"	18°31'30"	18°34'	0,163	0,173	— 0,010
10	4°46' 9"	16°40'30"	16°44'	0,147	0,169	— 0,022
11	4°56'19"	15°45'	15°48'20"	0,138	0,160	— 0,022
12	5° 6'52"	14°49'30"	14°52'50"	0,131	0,149	— 0,018
13	5°16'38"	14°	14° 3'30"	0,123	0,141	— 0,018
14	5°27'47"	13°47'	13°50'40"	0,121	0,131	— 0,010
15	5°37'35"	13°12'30"	13°38'28"	0,119	0,125	— 0,006
16	5°48'15"	12°35'	12°38'50"	0,111	0,118	— 0,007
17	5°57'25"	12° 5'	12° 8'50"	0,106	0,113	— 0,006
18	6° 6'	11°49'36"	11°53'30"	0,104	0,108	— 0,004
19	6°15'50"	11°21'40"	11°25'30"	0,100	0,103	— 0,003
20	6°25'34"	10°15'	10°18'50"	0,090	0,098	— 0,008
21	6°33'44"	10°	10° 3'55"	0,088	0,094	— 0,006
22	6°42'18"	9°55'	9°59'	0,087	0,091	— 0,004
23	6°51' 5"	9°43'	9°47'10"	0,085	0,087	— 0,002
24	6°59'13"	9° 8'50"	9°12'55"	0,080	0,084	— 0,004
25	7° 7'17"	8°55'	8°59'15"	0,078	0,082	— 0,003
26	7°15'22"	8°34'40"	8°39'45"	0,075	0,078	— 0,003

TABLEAU E (cube de 3^{cm}, 7) (*suite*).

N°	$i-r$	β	α	k obs.	k calc.	Obs.-calc.
27	7° 23' 22"	8° 0' 30"	8° 4' 25"	0,070	0,076	— 0,006
28	7° 31' 1"	7° 43' 40"	7° 47' 40"	0,068	0,073	— 0,005
29	7° 48' 55"	7° 30'	7° 34' 12"	0,066	0,071	— 0,005
30	7° 47' 16"	7°	7° 4'	0,062	0,069	— 0,007
40	8° 59' 34"	4° 41' 46"	4° 45' 15"	0,042	0,053	— 0,011
50	10° 3' 56"	3° 26' 12"	3° 30'	0,031	0,044	— 0,013
60	11° 13' 2"	2° 17' 30"	2° 20' 20"	0,020	0,037	— 0,017
70	12° 4' 34"	1° 15'	1° 16' 42"	0,011	0,021	— 0,010

Le tableau précédent montre un accord satisfaisant entre l'observation et la théorie; il est vrai que les différences obs-calc sont de même signe, mais les valeurs de ces différences sont trop faibles pour qu'on en puisse tirer une conclusion quelconque.

Nous donnons, ci-après, les observations faites en polarisant à 45° de la section principale ⁽¹⁾; les différences de marche sont données par le tableau B; il suffit de se reporter à ce tableau pour avoir les incidences. On a pour la valeur de k , donnée par l'observation, la formule

$$(4) \quad k = tg \varepsilon = tg (45^\circ - \alpha) .$$

On n'a pas effectué la correction due à la réfraction, elle est d'une importance négligeable pour de faibles incidences.

(1) Les formules sont

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos 2\pi d = \cos u \sin 2\alpha , \\ tg \varepsilon = \frac{1}{\sin u \, tg 2\alpha} , \end{array} \right.$$

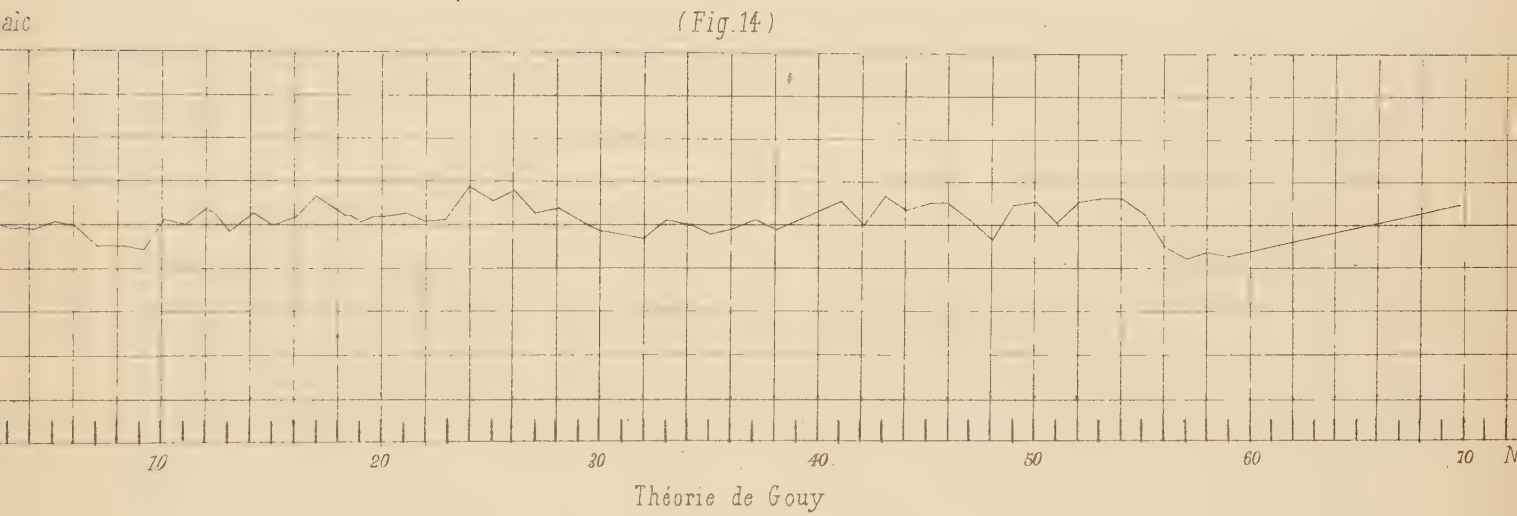
qui deviennent

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos 2\pi d = 0 , \\ tg \varepsilon = \cotg 2\alpha = tg \left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha \right) . \end{array} \right.$$

Gros Cube de 4^{cm} environ

Obs - Calc

(Fig. 14)



Abcisses..... N° d'ordre

Ordonnées. $d_{obs} - d_{calc}$

TABLEAU F (cube de 3^{cm}, polarisation à 45°).

N°	i	α	k obs.	k calc.	Obs.-calc.
1°	4°47'45"	10°15'	0,693	0,698	— 0,005
2°	7°3'30"	21°	0,445	0,479	— 0,034
3°	8°24'30"	24°35'	0,372	0,377	— 0,005
4°	9°16'30"	25°55'	0,346	0,322	+ 0,024

Enfin, le tableau suivant contient les observations faites sur la lame de quartz de 0^{cm}89, la lumière étant polarisée dans le plan perpendiculaire à la section principale.

TABLEAU G (lame de 0^{cm} 89).

N°	i	α	k obs.	k calc.	Obs.-calc.
1°	7°41'30"	46°31'15"	0,430	0,431	— 0,001
2°	11°13'	25°15'	0,224	0,235	— 0,011
5°	17°39'10"	10°15'	0,089	0,101	— 0,011
6°	19°17'10"	8°	0,070	0,085	— 0,015
7°	20°38'	4°22'30"	0,048	0,074	— 0,026
15°	30°10'30"	2°50'	0,025	0,037	— 0,012

Il n'y a aucun intérêt à déterminer k pour de plus hautes incidences, les valeurs de l'ellipticité finissant par atteindre l'ordre des millièmes ; ainsi pour $\alpha = 1^\circ$, la valeur de k est 0,009.

En résumé, il résulte de l'examen des tableaux contenus dans ce chapitre que, dans les limites de nos expériences, la théorie de l'indépendance des effets simultanés de la double réfraction et du pouvoir rotatoire, proposée par M. Gouy, est dans un accord complet avec l'observation (fig. 14).

CHAPITRE V

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES SUR LES ESSAIS DE THÉORIES
MATHÉMATIQUES. — VÉRIFICATION DES THÉORIES DE CAUCHY, MAC-CULLAGH,
SARRAU, BOUSSINESQ, LOMMEL, KETTELER,
VON LANG, VOIGT.

Un certain nombre de théories ont été proposées, ayant pour but d'expliquer par l'analyse mathématique les phénomènes de la polarisation rotatoire. La première tentative dirigée dans cette voie est due à Mac-Cullagh ⁽¹⁾ qui a cherché quelles sont les modifications à introduire dans les équations différentielles de la double réfraction pour tenir compte du pouvoir rotatoire. Elles consistent à compléter ces équations différentielles en ajoutant au second membre des dérivées troisièmes par rapport aux coordonnées. Soit une onde plane se propageant suivant oz , si l'on désigne par $x y z$ les coordonnées d'une molécule d'éther, par $\xi \eta \zeta$ les projections sur les axes des déplacements de cette molécule, les équations différentielles sont de la forme :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^3 \xi}{dt^3} = A \frac{d^2 \xi}{dz^2} + c \frac{d^3 \eta}{dz^3} \\ \frac{d^3 \eta}{dt^3} = B \frac{d^2 \eta}{dz^2} - c \frac{d^3 \xi}{dz^3} \end{array} \right.$$

L'introduction de pareils termes peut se justifier par des considérations sur la constitution particulière des cristaux rotateurs ⁽²⁾, mais Mac-Cullagh ne paraît pas avoir considéré la question à ce

(1) *Ir. Trans.* XVII, part. III, 461. — *Proceed. of the Ir. Acad.* I, 383, 1836.

(2) POINCARÉ. — *Théorie mathématique de la lumière*, p. 312.

point de vue. En étendant sa théorie aux cristaux biaxes, ce physicien avait introduit dans la fonction des forces l'aire relative d'une molécule par rapport aux autres molécules, or l'équation contient dès lors des termes proportionnels aux dérivées impaires, et de plus, l'introduction de ces aires relatives dans la théorie de la propagation de la lumière dans les cristaux à deux axes, montre que la polarisation y est généralement elliptique, mais que dans les directions de leurs axes optiques elle devient circulaire ⁽¹⁾ ; c'est là un fait expérimental que nous croyons avoir vérifié dans l'étude exposée plus loin des phénomènes relatifs à la compression du quartz.

La même question a été abordée par Cauchy, en 1847 ⁽²⁾. Ce géomètre complète les équations ordinaires du mouvement vibratoire par l'adjonction des dérivées premières des déplacements, mais il en résulte que les phénomènes sont indépendants de la longueur d'onde. Cauchy a du reste le premier essayé d'expliquer le phénomène de la polarisation rotatoire par une hypothèse sur la constitution mécanique du milieu et l'arrangement des molécules dont il faut évidemment tenir compte dans toute théorie rationnelle. Cauchy supposa aux molécules une forme dissymétrique, mais cette hypothèse conduit à admettre dans les équations différentielles des termes de même signe, tandis que les signes de ces coefficients doivent être contraires pour qu'il y ait polarisation rotatoire.

Les formules de Cauchy ont été développées par Clebsch, mais en faisant de nombreuses hypothèses, dont le degré de probabilité est fort douteux ⁽³⁾.

Une théorie pour être vraiment rationnelle doit dans ses équations contenir tous les caractères de symétrie que possèdent les milieux présentant le pouvoir rotatoire. Il ne suffit pas de remarquer que dans le cas des cristaux hémiedres, il peut s'introduire des termes dépendant de dérivés d'ordre impair, il faut aller plus loin et intro-

(1) Voir VERDET : *Optique physique*, t. II, p. 324 et suivantes.

(2) C. R. XXV, 331.

(3) CLEBSCH. — *Journal de Crelle*, LVII, p. 319. — Voir aussi Verdet : *Optique physique*, t. II, p. 328.

duire de toute nécessité, tout ce qui caractérise le milieu considéré. On sait que le pouvoir rotatoire ne se rencontre que dans les milieux hémiedres à formes conjuguées non superposables ; or, ainsi que l'a fait remarquer M. Ch. Soret dans un article que nous prendrons pour guide ⁽¹⁾, pour qu'une théorie soit satisfaisante, il faut que les termes qui expliquent le pouvoir rotatoire dans les hémiedres non superposables, ou bien perdent cette propriété, ou bien disparaissent et cela nécessairement, par simple symétrie, quand on considère les autres hémiedres, ou les holoèdres chez lesquels on ne trouve pas le phénomène de la polarisation rotatoire.

Avant de comparer à l'expérience, les résultats tirés des diverses théories mathématiques que nous avons étudiées, il est nécessaire d'exposer en quelques mots les hypothèses particulières à chacune d'elles.

Tout d'abord il est utile de faire un certain nombre de remarques générales, qui seront utiles pour la suite.

Le caractère fondamental de la polarisation rotatoire naturelle c'est d'avoir lieu en sens inverse, pour un observateur fixe, sur deux rayons cheminant en sens opposés, ce qui la distingue bien nettement de la polarisation rotatoire magnétique, ou pour des axes fixes la rotation s'effectue dans le même sens.

De plus, un milieu naturellement actif ne peut posséder de plans de symétrie passant par le rayon ou perpendiculaire à ce rayon. Dans le premier cas, il n'y aurait pas de raison pour que la rotation ait lieu dans un sens ou dans un autre ; dans le second cas deux rayons se propageant en sens inverse devraient éprouver des rotations symétriques par rapport à ce plan, et par suite de même sens pour un observateur fixe, ce qui est contraire à l'observation. Une conséquence de ce qui précède, c'est qu'un pareil milieu ne peut avoir de centre de symétrie, on sait en effet que les milieux cristallins qui présentent le pouvoir rotatoire sont des hémiedres non superposables.

(1) Remarques sur la théorie de la polarisation rotatoire naturelle, *Archives de Genève*, t. XXIV, 1890.

Nous allons maintenant montrer que pour que la rotation soit conforme au caractère fondamental de la polarisation rotatoire, il faut que les équations du mouvement, contiennent des dérivées d'ordre impair des déplacements par rapport aux coordonnées, et non par rapport au temps.

Soient $\xi \eta \zeta$ les composantes, au temps t , des déplacements d'une molécule d'éther dont les coordonnées sont $x y z$; désignons par A, B, C, des polynômes linéaires, à coefficient constant, des dérivées des divers ordres de $\xi \eta \zeta$ par rapport à $x y z$ et t . Les équations du mouvement lumineux sont de la forme : (1)

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 \xi}{dt^2} = A \\ \frac{d^2 \eta}{dt^2} = B \\ \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = C \end{array} \right.$$

Le caractère de la polarisation rotatoire, c'est-à-dire la propagation avec des vitesses différentes de deux ondes parallèles circulaires (ou elliptiques), s'explique si on admet que les fonctions qui entrent dans le second membre, contiennent des dérivées d'ordre impair des déplacements soit par rapport aux coordonnées, soit par rapport au temps, ces dérivés étant affectées d'un signe convenable.

Les composantes des déplacements sont de la forme :

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi = P e^{h'(l'x + m'y + n'z) + h(lx + my + nz - st) \sqrt{-1}} \\ \eta = Q e^{h'(l'x + m'y + n'z) + h(lx + my + nz - st) \sqrt{-1}} \\ \zeta = R e^{h'(l'x + m'y + n'z) + h(lx + my + nz - st) \sqrt{-1}} \end{array} \right.$$

les quantités P Q R déduites des équations (1) déterminent la nature des vibrations. Les intégrales représentent une onde plane

(1) Quelques auteurs emploient la notation symbolique suivante : (Sarrau, *J. de Liouville*, 2^e série, t. XIII, p. 60 — Soret, *loc. citato*) : soient $f g h$ des fonctions symboliques entières à coefficients constants des quantités $\alpha \beta \gamma \sigma$, qui représen-

dont la normale a pour cosinus directeur $l m n$, et qui s'étend à partir du plan

$$l'x + m'y + n'z = 0 .$$

Pour simplifier, supposons que l'onde tombe normalement sur le cristal alors :

$$l' = l , \quad m' = m , \quad n' = n .$$

Si l'on substitue dans les équations du mouvement les valeurs de $\xi \eta \zeta$, cela revient à remplacer

$$\xi \text{ par } P , \quad \eta \text{ par } Q , \quad \zeta \text{ par } R$$

et

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dx} , \quad \frac{d\eta}{dx} , \quad \frac{d\zeta}{dx} & \text{ par } (h + h' \sqrt{-1}) l , \\ \frac{d\xi}{dy} , \quad \frac{d\eta}{dy} , \quad \frac{d\zeta}{dy} & \text{ par } (h + h' \sqrt{-1}) m , \\ \frac{d\xi}{dz} , \quad \frac{d\eta}{dz} , \quad \frac{d\zeta}{dz} & \text{ par } (h + h' \sqrt{-1}) n , \\ \frac{d\xi}{dt} , \quad \frac{d\eta}{dt} , \quad \frac{d\zeta}{dt} & \text{ par } -hs \sqrt{-1} . \end{aligned}$$

ent pour simplifier, les symboles suivants : $\frac{d}{dx} = \alpha$, $\frac{d}{dy} = \beta$, $\frac{d}{dz} = \gamma$, $\frac{d}{dt} = \sigma$.
Les équations du mouvement lumineux sont linéaires à coefficients constants et de la forme

$$(1') \quad \begin{cases} \frac{d^2\xi}{dt^2} = f_1\xi + f_2\eta + f_3\zeta , \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} = g_1\xi + g_2\eta + g_3\zeta , \\ \frac{d^2\zeta}{dt^2} = h_1\xi + h_2\eta + h_3\zeta ; \end{cases}$$

par exemple, $f_1\xi$ sera de la forme

$$\begin{aligned} f_1\xi = & a \frac{d\xi}{dx} + b \frac{d\xi}{dy} + c \frac{d\xi}{dz} + d \frac{d\xi}{dt} + a_1 \frac{d^2\xi}{dx^2} + b_1 \frac{d^2\xi}{dy^2} + c_1 \frac{d^2\xi}{dz^2} + d_1 \frac{d^2\xi}{dt^2} \\ & + a_2 \frac{d^3\xi}{dx^3} + b_2 \frac{d^3\xi}{dy^3} + c_2 \frac{d^3\xi}{dz^3} + d_2 \frac{d^3\xi}{dt^3} + \dots \end{aligned}$$

Si on ne tient pas compte de la dispersion, il est inutile d'introduire des dérivées partielles du quatrième ordre.

Or, supposons que l'onde se propage en sens inverse, dans les nouvelles intégrales, il faut remplacer

$$\begin{aligned} & \xi \text{ par } P, \quad \eta \text{ par } Q, \quad \zeta \text{ par } R \\ \text{et} \quad & \frac{d\xi}{dx}, \quad \frac{d\eta}{dx}, \quad \frac{d\zeta}{dx} \text{ par } -(h + h' \sqrt{-1}) l, \\ & \frac{d\xi}{dy}, \quad \frac{d\eta}{dy}, \quad \frac{d\zeta}{dy} \text{ par } -(h + h' \sqrt{-1}) m, \\ & \frac{d\xi}{dz}, \quad \frac{d\eta}{dz}, \quad \frac{d\zeta}{dz} \text{ par } -(h + h' \sqrt{-1}) n, \end{aligned}$$

et comme $s = \frac{2\pi}{T} h = \frac{2\pi}{\lambda}$ ne varient pas, T étant la période et λ la longueur d'onde du mouvement vibratoire considéré, $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$ ne varient pas et doivent être remplacés encore par $-hs \sqrt{-1}$; il n'y a en définitive que $l m n$ qui changent de signe; de telle sorte qu'il suffit pour passer de la propagation primitive à la propagation en sens inverse, de changer le signe des symboles $\alpha = \frac{d}{dx}$, $\beta = \frac{d}{dy}$, $\gamma = \frac{d}{dz}$. Or, si la polarisation est due uniquement à l'existence des termes impairs en $\sigma = \frac{d}{dt}$ ces termes ne changent pas et le plan de polarisation tourne pour un observateur fixe dans le même sens, caractère que ne présente pas le pouvoir rotatoire naturel. L'existence de pareils termes que nous rencontrerons dans quelques théories, ne saurait donc être admise et est incompatible avec la symétrie des milieux qui présentent le pouvoir rotatoire. Si, d'ailleurs, à côté des termes en $\sigma = \frac{d}{dt}$ il y a d'autres termes impairs en $\frac{d}{dx}$, $\frac{d}{dy}$, $\frac{d}{dz}$ mais n'introduisant pas à eux seuls la polarisation rotatoire, ils ne la donneront pas non plus par le changement de signe. Si, au contraire, la polarisation rotatoire est uniquement produite par des dérivées impaires des déplacements $\xi \eta \zeta$ prises par rapport aux coordonnées $x y z$, le sens de la polarisation change avec le changement de signe, de

sorte que pour un observateur immobile, la rotation se fait en sens contraire quand la direction de la propagation de la lumière est devenue inverse de ce qu'elle était. Le résultat est bien conforme à l'expérience. On peut donc dire que les différentielles troisièmes par rapport au temps, ne peuvent rendre compte des propriétés caractéristiques qui distinguent la polarisation rotatoire naturelle ; il n'en est pas de même s'il s'agit de la polarisation rotatoire magnétique. Cette différence avait déjà été signalée par M. Boussinesq ⁽¹⁾. C'est ainsi que Mac Cullagh et Cauchy ont complété leurs équations par l'addition de dérivées impaires, troisièmes par rapport aux coordonnées, tandis qu'Airy avait ajouté des dérivées impaires par rapport au temps pour l'explication de la rotation du plan de polarisation de la lumière, dans l'expérience célèbre de Faraday.

On peut dire que les diverses théories mathématiques proposées se rangent dans l'une ou l'autre des catégories suivantes :

I. Les théories où l'on remarque simplement qu'il peut s'introduire dans les équations ordinaires du mouvement vibratoire lumineux, des termes dépendant des dérivées d'ordre impair, termes que l'on supprime dans les hémiedres superposables ou dans les holoèdres. Ex. : Mac Cullagh et Cauchy.

II. Les théories où, sans introduire, ce qui serait rationnel, tous les caractères de la symétrie particulière du milieu considéré, on fait sur la structure intime des molécules, ou sur leur arrangement, des hypothèses plus ou moins plausibles, destinées, en définitive, à introduire après coup et d'une manière détournée, les caractères de la symétrie cristalline du corps considéré. C'est ainsi que Briot ⁽²⁾ a supposé dans le quartz une distribution hélicoïdale des molécules d'éther, capables d'expliquer en effet les phénomènes de la polari-

(1) Cité par Soret, *loc. citata*.

(2) BRIOT. — *Essai sur la théorie mathématique de la lumière*, 1861.

sation rotatoire (1). Les calculs de Sohneke, de M. Mallard (2) relatifs à l'expérience classique de Reusch sur l'empilement des lames de mica biaxe, dépendent évidemment d'un point de vue identique, étant donné le mode d'empilement périodiquement croisé que l'on emploie.

Lommel et Ketteler (3) supposent aux molécules une structure dissymétrique, mais les théories de ces auteurs introduisent des dérivées impaires par rapport au temps, ce qui, nous le savons, est inadmissible.

Pour Lommel, l'éther a la même densité dans les corps cristallisés que dans le vide, de plus, il y a une action qui s'exerce entre la matière pondérable et l'éther. Ketteler assimile le mouvement vibratoire simultané des molécules matérielles et des molécules d'éther aux oscillations d'un pendule dans l'air. En employant les notations habituelles, les équations ont la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{d^2 \xi}{dt^2} + F(\xi, \xi_1) = e \frac{d^3 \xi}{ds^3}, \\ \rho' \frac{d^2 \xi_1}{dt^2} + 2K \frac{d\xi_1}{dt} + \omega^2 \xi_1 + F_1(\xi, \xi_1) = 0, \quad \text{etc....,} \end{array} \right.$$

ou ρ et ρ' sont les densités de l'éther et de la matière ξ, η, ζ ; ξ_1, η_1, ζ_1 les composantes des déplacements des molécules lumineuses et des molécules matérielles, e l'élasticité de l'éther, $2K$ le coefficient de résistance proportionnel à la simple vitesse et ω^2 l'intensité de la force élastique proportionnelle à l'écart de la molécule matérielle, ce sont ces deux forces, la force élastique et la force de frottement, qui ramènent les molécules du corps dans leur position d'équilibre. F et F_1 sont des fonctions particulières qui proviennent de l'action de la matière sur l'éther, et c'est ce

(1) L'analyse de M. Sarrau, dont nous allons parler, est un développement rationnel de cette idée particulière sur la distribution des molécules d'éther.

(2) MALLARD. — *Traité de cristallographie*, t. II, p. 278.

(3) Les théories de Lommel et de Ketteler ont été l'objet de vives critiques de la part de Voigt, et de la part aussi du rapporteur, qui en a fait un exposé dans les *Fortschritte der physik* (1883), p. 5-13, t. XXXIX.

terme auquel plusieurs auteurs ont donné des formes différentes (1). Lommel pose

$$F(\xi, \xi_1) = - F_1(\xi, \xi_1) = - \beta \left(\frac{d\xi_1}{dt} - \frac{d\xi}{dt} \right),$$

c'est-à-dire que les forces élastiques, mises en jeu par l'action de la matière sur l'éther, sont proportionnelles à la différence $\left(\frac{d\xi_1}{dt} - \frac{d\xi}{dt} \right)$ des vitesses des molécules de la matière et de l'éther.

Ketteler pose

$$F(\xi, \xi_1) = \rho \frac{d^2\xi}{dt^2} C,$$

$$F_1(\xi, \xi_1) = \rho' \frac{d^2\xi_1}{dt^2} C_1.$$

C et C₁ sont des constantes particulières au milieu; dans cette théorie, les forces élastiques développées par l'action mutuelle de l'éther et de la matière, sont proportionnelles aux accélérations des molécules matérielles ou éthérées.

Les résultats de la théorie de Ketteler ou de Lommel ne sont, du reste, pas d'accord avec l'expérience.

Voigt a repris la question qu'il a traitée avec plus de rigueur; à cause de l'importance de cette théorie, nous allons en faire un exposé rapide. On pose, conformément aux principes de la théorie de l'élasticité, six équations, trois sont relatives à la matière et trois à l'éther. En admettant, ainsi qu'on le fait communément en optique, que les forces extérieures sont nulles les équations sont de la forme :

$$\begin{array}{ll} \rho \frac{d^2\xi}{dt^2} = X + A & \rho' \frac{d^2\xi}{dt^2} = X' + A' \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{array}$$

(1) Helmholtz, dans sa théorie de la lumière, admet

$$F(\xi, \xi_1) = - F_1(\xi, \xi_1) = - \beta(\xi_1 - \xi),$$

c'est à dire que les forces élastiques provenant de l'action de la matière sur l'éther sont proportionnelles à la différence $(\xi_1 - \xi)$ des déplacements de la matière et de l'éther; M. Boussinesq, comme nous le verrons plus loin, introduit des termes de même nature.

ou X... représentent les composantes des influences moléculaires qui émanent des masses homogènes, c'est-à-dire que X est la composante suivant Ox de l'action de l'éther sur l'éther; X' provient au contraire de l'action de la matière sur la matière, A et A', etc. sont les composantes des actions moléculaires non homogènes de la matière sur l'éther et de l'éther sur la matière. On peut du reste remarquer que $A = -A'$. Les expressions de X, X'.... sont données par la théorie de l'élasticité. Quant à l'expression de A...., on fait intervenir le principe de l'énergie, c'est-à-dire qu'on écrit que le travail de l'action réciproque de la matière sur l'éther est une différentielle exacte. L'auteur cherche les seules expressions possibles de A compatibles avec cette condition; il trouve en particulier les suivantes ⁽¹⁾ :

$$(1) \quad -A_1 = n_1 (\xi - \xi') + o_1 (\eta - \eta') + o_2 (\zeta - \zeta') + \text{etc.}$$

$$(2) \quad +A_2 = p_1 \frac{d(\eta - \eta')}{dt} - p_2 \frac{d(\zeta - \zeta')}{dt} + \text{etc.}$$

$$(3) \quad -A_3 = r_1 \frac{d^2(\xi - \xi')}{dt^2} + s_1 \frac{d^2(\eta - \eta')}{dt^2} + s_2 \frac{d^2(\zeta - \zeta')}{dt^2} + \text{etc.}$$

$$(4) \quad +A_4 = q_1 \frac{d^3(\eta - \eta')}{dt^3} - q_2 \frac{d^3(\zeta - \zeta')}{dt^3} + \text{etc.}$$

.....

Voigt admet de plus que l'éther est presque incompressible de faible densité, et qu'il a dans tous les corps la même élasticité; on peut du reste négliger $\xi' \eta' \zeta'$ (composantes des déplacements de la matière) vis à vis de $\xi \eta \zeta$; ce qui revient à négliger l'entraînement de la matière par l'éther. Or, si on considère un milieu tel que les forces de l'espèce (2) (4) *n'existent pas*, on trouve pour la vitesse de propagation dans les milieux cristallisés, des lois plus compliquées que celles de Fresnel qui rendent la définition

(1) Nous conservons la notation du mémoire de Voigt. *Ann. Wiedmann* (19), p. 899, 1883.

du plan de polarisation de Neumann plus vraisemblable que celle de Fresnel ; on trouve en même temps l'explication des phénomènes de la dispersion. Si, au contraire, de pareils termes agissent, on explique les phénomènes de la polarisation circulaire et même elliptique. Or, ces termes sont des dérivées impaires par rapport au temps. Ainsi les forces qui figurent dans les équations, ont la forme la plus générale qui soit compatible avec le principe de la conservation de l'énergie, et cependant, ne renferment pas de termes capables d'expliquer la polarisation rotatoire naturelle. Or, comme le fait remarquer M. Soret, dans l'article déjà cité, il suffit d'admettre que les coefficients qui entrent dans les équations, ne sont pas constants, mais périodiquement variables avec les coordonnées ⁽¹⁾ ; mais suivant une remarque de Cauchy ⁽²⁾, de pareilles équations peuvent être ramenées à avoir des coefficients constants (bien différents du reste de la valeur moyenne que leur assigne la période) et ces équations peuvent être absolument différentes des premières. La théorie de Voigt pourrait alors, quoique renfermant des dérivées impaires par rapport au temps, expliquer les phénomènes de la polarisation rotatoire ; c'est ce que du reste l'expérience a confirmé.

III. — Il nous reste à indiquer les théories, ou les dérivées impaires par rapport aux coordonnées, sont rationnellement introduites, et où par suite elles disparaissent nécessairement et d'elles-mêmes, quand il s'agit de passer des milieux cristallins qui possèdent le pouvoir rotatoire à ceux qui ne le possèdent pas.

Deux hypothèses moléculaires sont capables d'introduire de pareils termes avec des signes convenables, la première est celle de Cauchy ⁽³⁾ qui admet une structure de l'éther périodiquement variable dans l'intervalle des molécules pondérables, hypothèse développée analy-

(1) Ce sera la solution de M. Sarrau.

(2) CAUCHY. — C. R., 1849, XXIX, 644.

(3) C. R., XXV, 331.

tiquement par M. Sarrau ⁽¹⁾ et que l'on peut rapprocher du reste de la solution de Briot, dont nous avons déjà parlé. L'autre est de M. Boussinesq ⁽²⁾, qui admet que l'éther a la même structure dans les milieux pondérables et dans le vide ; mais que dans son mouvement il entraîne les molécules matérielles, le déplacement de la matière pondérable étant une certaine fonction du déplacement de la molécule d'éther, fonction indéterminée pouvant dépendre au moins comme première approximation des positions relatives de ces molécules, ou encore de leur vitesse relative, etc..., mais dans tous les cas devant être d'accord avec la symétrie du milieu. Ces deux théories ayant une importance très grande, nous allons les résumer rapidement avant de passer à la comparaison des résultats de l'expérience et de la théorie, ce qui est l'objet principal de ce chapitre.

D'après M. Sarrau, la densité de l'éther renfermé dans un cristal, est sensiblement constante dans la sphère d'action d'un de ces points ; pour légitimer cette vue, il suffit d'admettre que le rayon de la sphère d'action est très petit par rapport aux dimensions d'un parallélépipède élémentaire de l'assemblage des molécules matérielles. La densité de l'éther en un point quelconque peut être considérée comme une fonction continue des coordonnées $x y z$ qui fixent la position de ce point dans l'intérieur d'une alvéole de l'assemblage moléculaire, si l'on passe de ce point à un autre compris dans sa sphère d'action, les coordonnées varient dans l'hypothèse adoptée de quantités très petites par rapport à elles-mêmes et la densité reçoit un accroissement de même ordre qui peut être négligé ; il n'en est pas de même si le point est en dehors de la sphère d'action, aussi si l'on mène une droite quelconque à partir d'un point donné, tous les points qui occupent la même situation par rapport à l'assemblage moléculaire ont même densité, mais si on se déplace le long de cette droite, la densité de l'éther est périodiquement variable. On est conduit alors à des équations qui sont celles que l'on trouve en considérant le

(1) *Journal de Liouville* (2), t. XIII, p. 99.

(2) *Journal de Liouville* (2), t. XIII, p. 331.

milieu homogène et isotrope, seulement les coefficients sont des fonctions périodiques des coordonnées ; en définitive cela revient à considérer un éther périodiquement isotrope. Si on regarde de plus l'éther comme inapte à propager les vibrations longitudinales, les six paramètres qui entrent dans les équations se réduisent à trois (1).

(1) Fresnel (*Mémoire sur les modifications...*, Janvier 1823), admettait que l'élasticité de l'éther est constante et sa densité variable, tandis que Mac Cullagh et Neumann supposent que la densité est la même dans tous les corps, et que son élasticité est seule altérée différemment par les divers milieux pondérables. Or Fresnel, dans son *Mémoire sur la double refraction* (Novembre 1821), antérieur, par conséquent, au précédent, néglige toute variation de densité de l'éther dans les cristaux et attribue les phénomènes à une variation de l'élasticité autour d'un point. De là une contradiction que la théorie de M. Sarrau fait disparaître, si l'on admet une variation périodique de la densité de l'éther. Les équations du mouvement vibratoire sont

$$\begin{aligned}\frac{d^2\xi}{dt^2} &= a^2 \left(\Delta_2 \xi - \frac{d\theta}{dx} \right) + f_1 \Delta_2 (\zeta'_y - \eta'_z) , \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} &= b^2 \left(\Delta_2 \eta - \frac{d\theta}{dy} \right) - \Delta_2 (g_1 \xi'_z + g_2 \zeta'_x) , \\ \frac{d^2\zeta}{dt^2} &= b^2 \left(\Delta_2 \zeta - \frac{d\theta}{dz} \right) + \Delta_2 (g_1 \xi'_y + g_2 \eta'_x) ,\end{aligned}$$

θ désigne la dilatation cubique de l'éther $\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz}$ et Δ_2 représentant le symbole $\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}$ (Lamé, *Leçon sur l'Elasticité*, § 26); f_1, g_1, g_2 sont des quantités très petites. La surface d'onde a pour équation

$$(s^2 - b^2)(s^2 - b^2 \cos^2 r - a^2 \sin^2 r) = \frac{4^2 \pi b^4}{\lambda^2} (g_2 \cos^2 r + f_1 \sin^2 r)(g_2 \cos^2 r - g_1 \sin^2 r)$$

ou approximativement :

$$(s^2 - b^2)(s^2 - b^2 \cos^2 r - a^2 \sin^2 r) = q^2 \cos^4 r$$

en posant

$$q = \frac{2\pi b^2 g_2}{\lambda}$$

on en déduit pour les vitesses de propagation, suivant une direction qui fait un angle r avec l'axe optique,

$$V^2 = b^2 - \frac{(b^2 - a^2) \sin^2 r}{2} \pm \sqrt{\frac{(b^2 - a^2)^2 \sin^4 r}{4} + \frac{4\pi^2 b^4 g_2^2 \cos^4 r}{\lambda^2}} .$$

De ce qui précède, on peut déduire la différence de marche (en longueur d'onde)

Au lieu de supposer que la densité de l'éther dépend de la position de la molécule considérée, M. Boussinesq suppose la densité uniforme en tous les points, mais il admet une action entre la matière pondérable et l'éther ; « ces actions réciproques sont inconnues, il est naturel de penser que leur effet le plus grand et sensible provient d'un espèce de frottement entre les molécules d'éther et de matière pondérable qui passent très près les unes des autres sans avoir une vitesse commune. »

Si l'on désigne par $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \xi, \eta, \zeta$ les composante du déplacement de la matière et de l'éther, on a $\xi_1 = f(\xi)$ et c'est dans la recherche de cette expression que l'on introduit les caractères de symétrie du milieu (1).

de deux vibrations elliptiques ; M. Sarrau ne donne que la valeur des deux vitesses ; on en tire la relation suivante :

$$d^2 = \left[\frac{b^2 - a^2}{2b^3\lambda} \right]^2 \sin^4 r + \left[\frac{2\pi g_2}{b\lambda^2} \right]^2 \cos^4 r$$

où

$$d^2 = P^2 \sin^4 r + d_o^2 \cos^4 r$$

en posant $P = \frac{b^2 - a^2}{2b^3\lambda}$ et $d_o = \frac{2\pi g_2}{b\lambda^2}$; le rapport k des axes de l'une des vibrations est donné par

$$k = \frac{-(b^2 - a^2) \sin^2 r + \sqrt{(b^2 - a^2)^2 \sin^4 r + \frac{4\pi^2 b^4 g_2^2 \cos^4 r}{\lambda^2}}}{\frac{2\pi b^2 g_2 \cos^2 r}{\lambda}} = -h + \sqrt{h^2 + 1}$$

en posant $h = \frac{P}{d_o} \tan^2 r$.

De la valeur $d_o = 1,2058$ on peut tirer la valeur de g_2 , quantité très petite $g_2 = 0,634638 \times 10^{-9}$.

(1) La première des équations du mouvement vibratoire est

$$\rho \frac{d^2 \xi}{dt^2} = (\mu + \lambda) \frac{d\theta}{dx} + \mu \Delta_2 \xi - \rho_1 \frac{d^2 \xi_1}{dt^2} ;$$

le terme $-\rho_1 \frac{d^2 \xi_1}{dt^2}$ représente le frottement des molécules de matière et d'éther ; (ρ_1 = densité de la matière pondérable). La symétrie du milieu donne

Ces considérations générales terminées, nous allons exposer les conséquences que l'on en peut tirer. Si l'on désigne par d_o et d la différence de marche suivant l'axe optique, ou suivant une direction inclinée de l'angle r sur l'axe optique, les diverses théories proposées donnent l'une ou l'autre formule

$$(I) \quad d^2 = P^2 \sin^4 r + d_o^2$$

$$\xi_1 = A\xi + B \left(\frac{d\eta}{dz} - \frac{d\zeta}{dy} \right) + C \frac{d\theta}{dx} + D \Delta_2 \xi .$$

La première des équations devient alors, après transformation,

$$\begin{aligned} (\rho + \rho_1 A) \frac{d^2 \xi}{dt^2} = & \left(\mu + \lambda + \frac{4C\pi^2 \rho_1}{T^2} \right) \frac{d\theta}{dx} + \left(\mu + \frac{4D\pi^2 \rho_1}{T^2} \right) \Delta_2 \xi \\ & + \frac{4B\pi^2 \rho_1}{T^2} \left(\frac{d\eta}{dz} - \frac{d\zeta}{dy} \right) , \end{aligned}$$

T est la période du mouvement vibratoire. On voit que tout se passe comme si la densité de l'éther ρ était devenue $\rho + \rho_1 A$, et comme si les coefficients d'élasticité de l'éther étaient augmentés d'un terme variant en raison inverse du carré de la période.

$$\mathcal{H} = \frac{\lambda + \mu + \frac{4\pi^2 C \rho_1}{T^2}}{\rho + \rho_1 A} \quad L = \frac{\mu + \frac{4\pi^2 D \rho_1}{T^2}}{\rho + \rho_1 A} \quad k = \frac{\rho_1 B}{\rho + \rho_1 A}$$

il vient :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \xi}{dt^2} = & \mathcal{H} \frac{d\theta}{dx} + L \Delta_2 \xi + \frac{4\pi^2 k}{T^2} \left(\frac{d\eta}{dz} - \frac{d\zeta}{dy} \right) \\ & \dots\dots\dots \text{etc.} \end{aligned}$$

On en déduit (*Journal de Liouville*, 2^e série, t. XIII, p. 335) :

$$\begin{aligned} d^2 = & \left[\frac{h^2 - a^2}{2b^3 \lambda} \right]^2 \sin^4 r + \left[\frac{2\pi k}{a^2 \lambda^2} \right]^2 \\ & d^2 = P^2 \sin^4 r + d_o^2 ; \end{aligned}$$

on tire de la valeur de d_o la valeur de $k = 0,27593 \times 10^{-9}$; la valeur du rapport des axes de l'une des vibrations elliptiques est

$$k = \frac{d_o}{P \sin^2 r + \sqrt{P^2 \sin^4 r + d_o^2}} = -h + \sqrt{h^2 + 1}$$

en posant

$$h = \frac{P}{d_o} \sin^2 r .$$

on

$$(II) \quad d^2 = P^2 \sin^4 r + d_o^2 \cos^4 r$$

avec des valeurs différentes de P pour chaque théorie.

La première expression (I) est fournie par les théories de Mac-Cullagh ⁽¹⁾, Clebsch ⁽²⁾, Von-Lang ⁽³⁾, Voigt ⁽⁴⁾, Boussinesq ⁽⁵⁾ avec

$$P = \frac{n'(n''^2 - n'^2)}{2n''^2\lambda} = 153,418 ;$$

l'autre expression (II) convient aux théories de Cauchy ⁽⁶⁾, Von Lang ⁽⁷⁾, Lommel ⁽⁸⁾, Ketteler ⁽⁹⁾ et Sarrau ⁽¹⁰⁾ avec les valeurs de P suivantes ⁽¹¹⁾ :

Cauchy et Von Lang (1 ^{er} mémoire)...	$P = \frac{(n'' - n')n'}{n''\lambda} = 153,793$
Lommel.....	$P = \frac{n'^2 - 1}{n''^2 - 1} \cdot \frac{n''^2 - n'^2}{2n'\lambda} = 152,926$
Ketteler.....	$P = \frac{n''^2 - n'^2}{2n''\lambda} = 154,873$
Sarrau.....	$P = \frac{(n''^2 - n'^2)n'}{2n''^2\lambda} = 153,418$

(1) MAC CULLAGH. — *Trans. Soc. roy. d'Irlande*, XVII, part. III, 1839, p. 441, et *Proceeding of Ir. Ac.*, p. 383, 1839.

(2) CLEBSCH. — *Crelles* (Journal), t. LVII, 1859, p. 356. — Verdet (*Optique physique*, t. II, p. 328), critique cette théorie.

(3) VON LANG. — *Pogg. Ann.* (Ergbd), 8, p. 622, 1878 (second mémoire).

(4) VOIGT. — *Wied. Ann.*, t. XIX, p. 889, 1883; est revenu sur ce mémoire.

(5) BOUSSINESQ. — *Journal de Liouville*, 2^e série, t. XIII, p. 335, 1868.

(6) CAUCHY. — *Ann. de Phys. et de Chimie* (3), t. XXX, p. 68, 1850; cité par Jamin.

(7) VON LANG. — (Premier mémoire), *Pogg. ann.*, 119, p. 85, 1863.

(8) LOMMEL. — *Wied. Ann.*, t. XV, p. 389, 1881.

(9) KETTELER. — *Theoretisch optik*, p. 419-421, 1885.

(10) SARRAU. — *Journal de Liouville*, 2^e série, t. XIII, p. 105, 1863.

(11) On a pris pour n' et n'' les indices du quartz donnés par M. Mascart, et, de plus, pour tenir compte de l'effet de la température, on a appliqué la relation suivante, due à M. Macé de Lépinay :

$$n' - n'' = 0,009\,432\,06 (1 - 0,0001246 t) \text{ pour } t = 15^\circ ;$$

ce qui fait que les valeurs attribuées à P diffèrent légèrement des valeurs données par certains auteurs (Hecht, Mac Connell).

Les tableaux suivants donnent les résultats de l'expérience et de la théorie ; ces résultats ont été traduits en courbe, les abscisses représentant les numéros d'ordre des franges et les ordonnées représentant l'écart entre l'observation et le calcul, obs-cal. Les résultats sont relatifs aux différences de marche des deux vibrations elliptiques.

La première colonne donne les numéros d'ordre, et la seconde les incidences correspondantes ; les valeurs de l'observation $d_{\text{observé}}$ sont dans la troisième. Dans les autres, on a seulement transcrit l'écart entre l'observation et le calcul : $d_{\text{obs}} - d_{\text{calc}}$. La quatrième colonne est relative à la théorie de Boussinesq, etc... ; les suivantes aux théories de Sarrau, Cauchy et Von Lang ; Lommel et Ketteler.

TABLEAU A.

N°	<i>i</i>	<i>d</i> obs.	1 BOUSSINESQ, etc.	2 SARRAU	3 CAUCHY, VON LANG	4 LOMMEL	5 KETTELER
1	2° 37' 15"	1,213	+ 0,002	± 0,000	± 0,000	± 0,000	± 0,000
2	6° 39' 20"	1,478	— 0,005	± 0,000	— 0,001	+ 0,002	— 0,004
3	8° 1' 57"	1,746	+ 0,003	+ 0,011	+ 0,009	+ 0,015	+ 0,003
4	9° 10' 45"	2,011	— 0,026	— 0,014	— 0,018	— 0,010	— 0,026
5	10° 1' 52",5	2,277	— 0,022	— 0,008	— 0,014	— 0,004	— 0,025
6	10° 46' 15"	2,543	— 0,013	+ 0,001	— 0,004	+ 0,008	— 0,017
7	11° 29' 7"	2,807	— 0,022	— 0,004	— 0,001	+ 0,002	— 0,027
8	12° 16'	3,071	— 0,083	— 0,062	— 0,072	— 0,055	— 0,089
9	12° 50'	3,335	— 0,070	— 0,047	— 0,056	— 0,041	— 0,077
10	13° 24'	3,599	— 0,072	— 0,049	— 0,060	— 0,041	— 0,082
11	13° 52'	3,862	— 0,038	— 0,013	— 0,027	— 0,0002	— 0,049
12	14° 21'	4,125	± 0,000	+ 0,005	— 0,008	+ 0,025	— 0,032
13	14° 47' 45"	4,388	+ 0,015	+ 0,040	+ 0,027	+ 0,052	+ 0,001
14	15° 18' 15"	4,649	— 0,002	+ 0,020	+ 0,005	+ 0,032	— 0,023
15	15° 45'	4,910	+ 0,002	+ 0,032	+ 0,015	+ 0,044	— 0,014
16	16° 14'	5,171	— 0,023	+ 0,013	— 0,004	+ 0,027	— 0,035
17	16° 38' 55"	5,432	— 0,003	+ 0,027	+ 0,009	+ 0,041	— 0,023
18	17° 3' 30"	5,692	+ 0,006	+ 0,039	+ 0,020	+ 0,054	— 0,015
19	17° 28' 45"	5,951	+ 0,003	+ 0,036	+ 0,017	+ 0,052	— 0,020
20	17° 55'	6,209	— 0,019	+ 0,013	— 0,004	+ 0,032	+ 0,043
21	18° 17'	6,465	— 0,003	+ 0,032	+ 0,012	+ 0,053	— 0,028
22	18° 40'	6,720	— 0,003	+ 0,033	+ 0,012	+ 0,052	— 0,030
23	19° 3' 30"	6,975	— 0,014	+ 0,023	+ 0,001	+ 0,043	— 0,043
24	19° 25' 15"	7,230	— 0,009	+ 0,027	+ 0,006	+ 0,050	— 0,039
25	19° 46' 45"	7,490	— 0,002	+ 0,036	+ 0,014	+ 0,059	— 0,033
26	20° 8' 15"	7,752	+ 0,005	+ 0,044	+ 0,020	+ 0,068	— 0,028
27	20° 29' 30"	7,980	— 0,024	+ 0,016	— 0,008	+ 0,041	— 0,058
28	20° 49' 45"	8,260	+ 0,008	+ 0,048	+ 0,024	+ 0,074	— 0,028
29	21° 10' 37"	8,520	+ 0,009	+ 0,050	+ 0,025	+ 0,077	— 0,028
30	21° 32' 39"	8,767	— 0,024	+ 0,019	— 0,004	+ 0,047	— 0,062

TABLEAU A (*suite*).

N ^o	$\hat{z}$	k obs.	1 BOUSSINESQ, etc.	2 SARRAU	3 CAUCHY, VON LANG	4 LOMMEL	5 KETTELER
31	21°55'12"	9,025	— 0,053	— 0,007	— 0,033	+ 0,020	— 0,093
32	22°14'15"	9,280	— 0,045	+ 0,002	— 0,025	+ 0,029	— 0,087
33	22°33'48"	9,530	— 0,052	— 0,003	— 0,031	+ 0,025	— 0,095
34	22°52'15"	9,785	— 0,041	+ 0,008	— 0,020	+ 0,102	— 0,084
35	23°10'18"	10,035	— 0,034	+ 0,016	— 0,013	+ 0,046	— 0,079
36	23°29'18"	10,285	— 0,041	+ 0,033	— 0,020	+ 0,040	— 0,088
37	23°48'30"	10,540	— 0,049	+ 0,003	— 0,028	+ 0,034	— 0,098
38	24° 5'18"	10,790	— 0,032	+ 0,021	— 0,010	+ 0,053	— 0,082
39	24°24'18"	11,031	— 0,056	— 0,002	— 0,034	+ 0,031	— 0,108
40	24°40'48"	11,285	— 0,035	+ 0,020	— 0,013	+ 0,054	— 0,088
41	24°57'15"	11,540	— 0,011	+ 0,045	+ 0,011	+ 0,071	— 0,055
42	25°14'30"	11,780	— 0,019	+ 0,038	+ 0,004	+ 0,073	— 0,074
43	25°31'15"	12,030	— 0,013	+ 0,045	+ 0,010	+ 0,081	— 0,070
44	25°48'30"	12,275	— 0,021	+ 0,039	+ 0,003	+ 0,076	— 0,079
45	26° 3'	12,520	+ 0,012	+ 0,072	+ 0,036	+ 0,109	— 0,047
46	26°16'15"	12,770	+ 0,074	+ 0,081	+ 0,098	+ 0,115	+ 0,014
47	26°32'30"	13,020	+ 0,027	+ 0,089	+ 0,051	+ 0,127	— 0,035
48	26°56'58"	13,265	— 0,049	+ 0,015	— 0,027	+ 0,051	— 0,112
49	27°11'28"	13,517	— 0,017	+ 0,048	+ 0,009	+ 0,088	— 0,082
50	27°24'30"	13,750	+ 0,018	+ 0,083	+ 0,043	+ 0,124	— 0,048
51	27°42'	14,000	± 0,000	+ 0,066	+ 0,024	+ 0,108	— 0,069
52	27°56'	14,245	— 0,004	+ 0,094	+ 0,018	+ 0,138	— 0,040
53	28°10'30"	14,475	+ 0,033	+ 0,090	+ 0,058	+ 0,145	— 0,036
54	28°24'30"	14,730	+ 0,070	+ 0,105	+ 0,097	+ 0,183	— 0,001
55	28°40'30"	14,970	+ 0,004	+ 0,128	+ 0,029	+ 0,119	— 0,069
56	29°	15,220	+ 0,001	+ 0,070	+ 0,026	+ 0,117	— 0,074
57	29°20'	15,465	— 0,073	+ 0,065	— 0,047	+ 0,165	— 0,149
58	29°40'	15,710	— 0,147	+ 0,060	— 0,138	+ 0,160	— 0,241
59	29°58'	15,950	— 0,197	+ 0,050	— 0,174	+ 0,198	— 0,277
60	30°16'	16,200	— 0,242	+ 0,050	— 0,215	+ 0,200	— 0,323
70	32°21'	18,592	+ 0,072	+ 0,157	+ 0,124	+ 0,213	— 0,020

Si l'on tient compte seulement des 60 premières mesures, on trouve, pour la moyenne (obs-cal) de chaque théorie, les résultats suivants :

	Moyenne (obs.-calc.)
Boussinesq.....	+ 0,023
Sarrau.....	+ 0,029
Cauchy.....	— 0,014
Lommel.....	+ 0,040
Ketteler.....	— 0,060

Les courbes I, II, III, IV, V (fig. 15), qui représentent graphiquement les résultats du tableau A, ont, à première vue, un caractère de ressemblance fort net. Les sinuosités des courbes se correspondent exactement, et il semble que toutes ces courbes sont les mêmes, ayant subi simplement une translation suivant les ordonnées. On en peut conclure que les écarts que l'on retrouve sur chaque courbe pour la même incidence représentent les erreurs de l'observation, tandis que le glissement de la courbe mesure l'écart systématique de la théorie et de l'expérience.

De l'inspection du tableau et des courbes, il résulte tout d'abord que les théories de Lommel et de Ketteler doivent être rejetées ainsi qu'on pouvait s'y attendre après les considérations générales du début de ce chapitre. La théorie de Ketteler donne, pour la différence de marche, des nombres trop grands (écart moyen 0,06) et celle de Lommel des nombres trop faibles (écart moyen 0,04). Pour ces deux théories, le signe de la différence obs-cal est, à quelques exceptions, toujours le même, on peut donc, en toute rigueur, conclure à l'inexactitude de ces deux théories.

La théorie de Cauchy donne, ainsi que le montre la courbe III, des résultats satisfaisants. Pour les faibles incidences, la différence de marche due à la double réfraction seule est donnée par l'expression

$$\varphi = \frac{n''-n'}{n'n''_{\lambda}} \sin^2 i = \frac{n'(n''-n')}{n''_{\lambda}} \sin^2 r ;$$

on peut écrire la différence de marche telle que la donne la théorie de Cauchy sous la forme

$$d^2 = \varphi^2 + d_o^2 \cos^4 r .$$

Pour ces faibles incidences, $d_o^2 \cos^4 r$ se confond presque avec d_o^2 ; sous cette forme, on retrouve la relation donnée par la théorie de M. Gony.

La théorie de M. Sarrau paraît donner des nombres un peu trop faibles. On a, pour la différence de marche, des vibrations elliptiques :

$$d^2 = \left[\frac{n'^2(n''^2 - n'^2)}{2n''^2\lambda} \right]^2 \sin^4 r + d_o^2 \cos^4 r$$

que l'on peut écrire

$$d^2 = \left(\frac{n' + n''}{2n''} \right)^2 \left(\frac{n'(n'' - n')}{n''\lambda} \right)^2 \sin^4 r + d_o^2 \cos^4 r$$

ou en posant

$$\rho = \frac{n' + n''}{2n''} = 0,99709$$

on a

$$d^2 = \rho^2 \varphi^2 + d_o^2 \cos^4 r ;$$

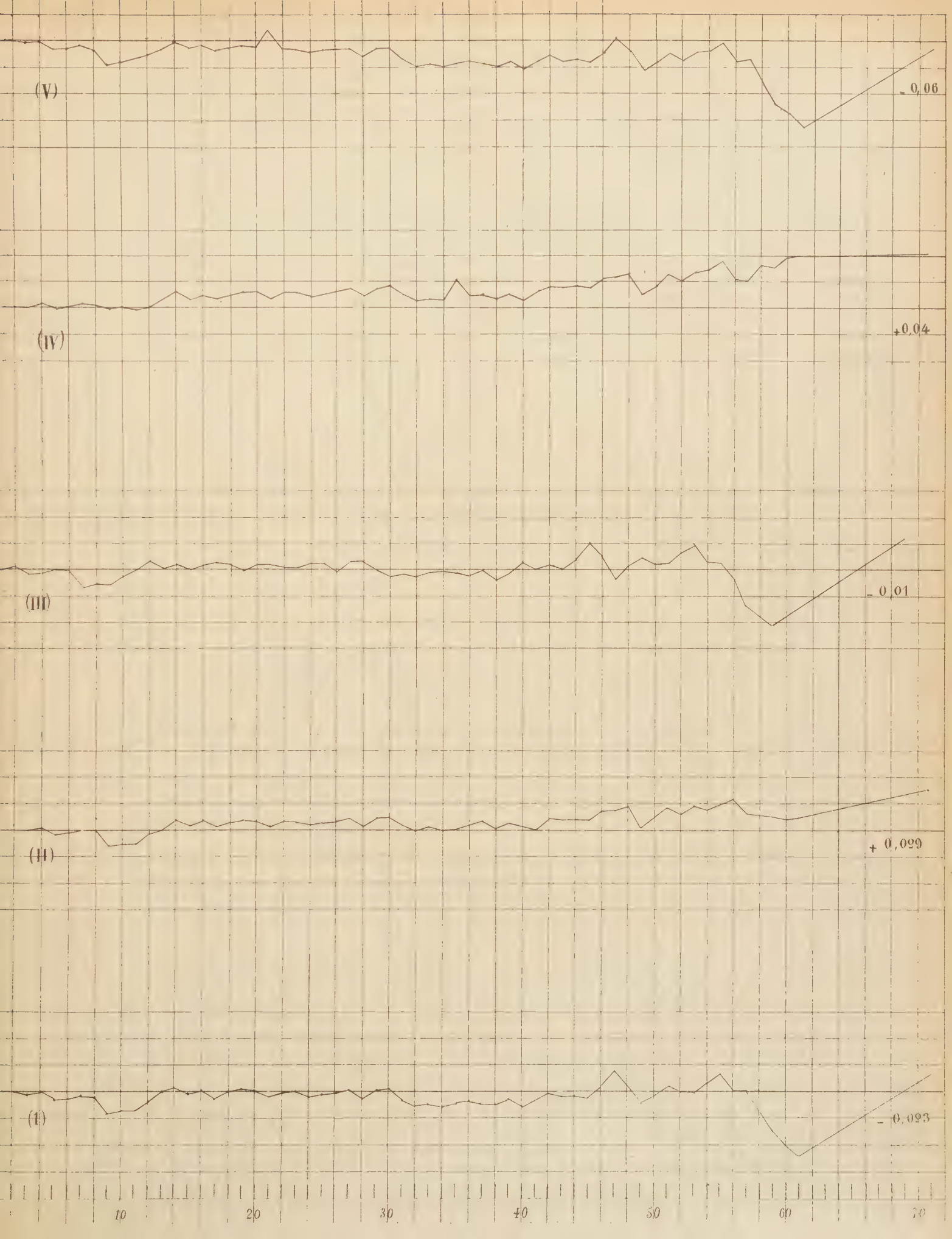
c'est la forme de la relation de Cauchy, avec cette différence que φ est remplacé par $\rho\varphi$; ρ étant inférieur à l'unité ; la théorie de M. Sarrau donne des nombres, en effet, plus petits que ceux tirés de la théorie de Cauchy. Il faut remarquer en outre, que la relation déduite de la théorie de M. Sarrau n'est qu'approchée, puisque on a supposé f_1 et g_1 nuls ⁽¹⁾.

La théorie de M. Boussinesq, au contraire, donne des nombres qui paraissent un peu trop forts ; elle donne la relation suivante pour calculer la différence de marche des vibrations elliptiques ⁽²⁾ :

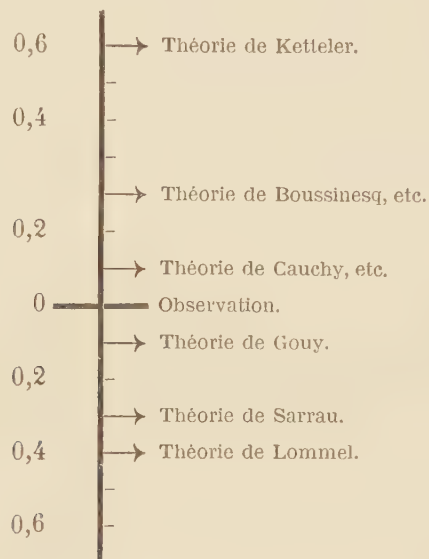
$$d^2 = \rho^2 \varphi^2 + d_o^2 .$$

(1) Plus exactement on néglige les produits $f_1 g_1$, $f_1 g_2$, $g_1 g_2$.

(2) Le terme φ correspond à la double refraction ordinaire, mais sans tenir



Si on porte les écarts sur une même ligne verticale en prenant pour o , les valeurs de l'observation, on a le tableau suivant :



Comme les écarts ne sont pas très grands, on peut, en résumé, conclure à l'inexactitude certaine des deux seules théories de Lommel et de Ketteler ; pour toutes les autres théories (Boussinesq, Cauchy, Sarrau), il n'est guère possible de conclure d'une façon formelle ; on peut seulement dire que la théorie de Cauchy, qui avait du reste déjà subi le contrôle de l'expérience (par Jamin), conduit à des résultats qui concordent d'une façon satisfaisante avec ceux que donne l'observation.

compte de la séparation des rayons ; cette remarque est nécessaire, car sous cette forme on pourrait la comparer à la théorie de M. Gouy

$$d^2 = \varphi^2 + d_o^2 ,$$

elle devrait donner des résultats inférieurs à ceux déduits de cette dernière théorie ; or c'est l'inverse qui a lieu, car dans la théorie de M. Gouy nous avons calculé φ en tenant compte de la séparation des rayons. Une comparaison rigoureuse n'est donc pas possible.

Ces mêmes théories permettent aussi de déterminer la forme des ellipses. Le rapport des axes de chacune des vibrations elliptiques est k et $\frac{1}{k}$, et est donné par une relation de la forme :

$$k = -h + \sqrt{h^2 + 1}$$

avec des valeurs différentes de h pour chaque théorie

- (1) Boussinesq, etc..... $h = \frac{P}{d_o} \sin^2 r$
- (2) Sarrau $h = \frac{P}{d_o} \operatorname{tg}^2 r$
- (3) Cauchy, Von Lang $h = \frac{P}{d_o} \operatorname{tg}^2 r$
- (4) Lommel $h = \frac{P}{d_o} \operatorname{tg}^2 r$
- (5) Ketteler $h = \frac{P}{d_o} \sin r \cdot \operatorname{tg} r$

Dans chacune de ces expressions, P a une valeur particulière qui a déjà été donnée précédemment dans l'expression des différences de marche.

Le tableau suivant donne les valeurs de k , observé et calculé d'après chacune de ces théories. La première colonne du tableau B donne le numéro des franges ; pour avoir les incidences correspondantes, il suffit de se reporter au tableau A. A partir de la vingtième frange, on a donné les résultats de dix en dix franges seulement.

TABLEAU B.

N°	k observé.	BOUSSINESQ k calc.	SARRAU k calc.	CAUCHY k calc.	LOMMEL k calc.	KETTELER k calc.	GOUY k calc.
1	0,902	0,895	0,894	0,894	0,894	0,893	0,900
2	0,519	0,514	0,512	0,511	0,513	0,510	0,515
3	0,387	0,402	0,400	0,399	0,401	0,339	0,402
4	0,313	0,328	0,326	0,325	0,327	0,324	0,332
5	0,265	0,284	0,281	0,280	0,282	0,280	0,274
6	0,225	0,251	0,248	0,247	0,249	0,247	0,251
7	0,210	0,224	0,221	0,220	0,222	0,221	0,225
8	0,184	0,199	0,196	0,195	0,197	0,196	0,201
9	0,163	0,184	0,180	0,178	0,181	0,180	0,173
10	0,147	0,169	0,166	0,165	0,166	0,166	0,169
11	0,138	0,159	0,155	0,154	0,156	0,155	0,160
12	0,131	0,149	0,145	0,145	0,146	0,146	0,149
13	0,123	0,141	0,137	0,137	0,138	0,138	0,141
14	0,121	0,132	0,124	0,128	0,129	0,129	0,131
15	0,119	0,125	0,122	0,121	0,122	0,122	0,125
16	0,111	0,118	0,114	0,114	0,115	0,115	0,118
17	0,106	0,113	0,108	0,108	0,109	0,109	0,113
18	0,104	0,107	0,104	0,103	0,104	0,104	0,108
19	0,100	0,103	0,101	0,098	0,099	0,100	0,103
20	0,090	0,098	0,094	0,094	0,094	0,095	0,098
30	0,062	0,069	0,065	0,065	0,065	0,066	0,069
40	0,042	0,053	0,050	0,050	0,050	0,051	0,053
50	0,031	0,044	0,041	0,040	0,041	0,041	0,044
60	0,020	0,036	0,033	0,035	0,033	0,035	0,037
70	0,011	0,033	0,029	0,029	0,028	0,030	0,021

De ce tableau, on peut conclure que, au point de vue de la forme des ellipses vibratoires, les diverses théories examinées conduisent

à des résultats presque identiques, les nombres trouvés pour la valeur de k étant du reste, dans tous les cas, supérieurs à ceux que donne l'observation. Dans les chapitres suivants, nous vérifions plus particulièrement l'exactitude de la théorie de M. Gouy, par les conséquences qui s'en déduisent et qui sont, en tous points, conformes aux résultats de l'observation.

DEUXIÈME PARTIE

*Étude du quartz comprimé soumis à une compression
normale à l'axe optique.*

CHAPITRE VI

FORMULES RELATIVES A LA SUPERPOSITION D'UNE DOUBLE RÉFRACTION CROISSANTE, OBTENUE PAR LA COMPRESSION, AU POUVOIR ROTATOIRE CONSTANT D'UNE LAME DE QUARTZ. — ÉQUATION DE L'ELLIPSE ÉMERGENTE, ET DÉTERMINATION DE L'ANGLE α DU GRAND AXE DE CETTE ELLIPSE AVEC LA VIBRATION INCIDENTE PRIMITIVE.

Soit une lame de quartz taillée normalement à l'axe et que l'on comprime latéralement. On associe ainsi au pouvoir rotatoire $\frac{\omega}{\pi}$ une double réfraction φ que l'on peut faire varier avec la pression. Si l'on fait tomber normalement sur la lame un rayon de lumière polarisée horizontalement, par exemple, on obtient à l'intérieur du cristal, deux vibrations elliptiques privilégiées d'ellipticité k et $\frac{1}{k}$, qui se propagent avec des vitesses différentes, et présentent à la sortie une différence de marche d évaluée en longueur d'onde. Ces deux vibrations interfèrent et donnent une ellipse émergente dont les éléments sont accessibles à l'expérience.

Si l'on considère deux axes de coordonnées, l'un horizontal, l'autre vertical les composantes principales d'amplitude A et B présentent une différence de phase $2\pi u$ et le grand axe de l'ellipse fait avec la vibration incidente horizontale un angle α . Il s'agit de déterminer l'angle α en fonction de φ , de $\frac{\omega}{\pi}$ et de k .

Les composantes principales sont :

$$(1) \quad \begin{cases} X = A \sin \xi \\ Y = B \sin (\xi + 2\pi u) \end{cases},$$

du reste, on a (chapitre II)

$$(2) \quad \begin{cases} A^2 = \left(\frac{k}{1+k^2}\right)^2 \left[\left(k + \frac{1}{k}\right)^2 - 4 \sin^2 \pi d \right] \\ B^2 = 4 \left(\frac{k}{1+k^2}\right)^2 \sin^2 \pi d , \end{cases}$$

l'équation de l'ellipse émergente est alors :

$$(3) \quad \frac{X^2}{A^2} + \frac{Y^2}{B^2} - \frac{2XY}{AB} \cos 2\pi u = \sin^2 \pi u .$$

Prenons pour axes de coordonnées les axes de l'ellipse et effectuons le changement d'axes ; on a

$$(4) \quad \begin{cases} X = X' \cos \alpha + Y' \sin \alpha \\ Y = -X' \sin \alpha + Y' \cos \alpha . \end{cases}$$

Si l'on écrit après la substitution que le rectangle des coordonnées est nul, on a

$$(5) \quad tg 2\alpha = \frac{2AB}{A^2 - B^2} \cos 2\pi u .$$

Posons

$$tg \psi = \frac{B}{A} ,$$

il vient

$$(5') \quad tg 2\alpha = tg 2\psi \cos 2\pi u .$$

Si l'on pose, ainsi qu'on l'a déjà fait dans la première partie,

$$k = tg \varepsilon ,$$

il faut évaluer ψ et u en fonctions des paramètres de la biréfringence elliptique, c'est-à-dire en fonction de d et de ε .

On a déjà trouvé (chapitre II)

$$tg 2\pi u = \frac{1 - k^2}{1 + k^2} tg \pi d ,$$

c'est-à-dire

$$(6) \quad tg 2\pi u = \cos 2\varepsilon \cdot tg \pi d ,$$

d'où l'on tire en passant aux angles doubles $2\pi d$

$$(7) \quad \cos^2 2\pi u = \frac{1 + \cos 2\pi d}{2 - \sin^2 2\varepsilon (1 - \cos 2\pi d)} ,$$

ce qui exprime u en fonction de d et de ε .

Il faut évaluer maintenant ψ en fonction des mêmes quantités.

On a

$$tg^2 \psi = \frac{4k^2 \sin^2 \pi d}{(1 + k^2)^2 - 4k^2 \sin^2 \pi d}$$

ou

$$tg^2 \psi = \frac{\sin^2 2\varepsilon \cdot \sin^2 \pi d}{1 - \sin^2 2\varepsilon \cdot \sin^2 \pi d}$$

et

$$(8) \quad tg 2\psi = \frac{\sin 2\varepsilon \sqrt{1 - \cos 2\pi d} \sqrt{2 - \sin^2 2\varepsilon (1 - \cos 2\pi d)}}{\cos^2 2\varepsilon + \sin^2 2\varepsilon \cdot \cos 2\pi d} ,$$

il suffit alors dans l'équation (5') de remplacer $tg 2\psi$ et $\cos 2\pi u$ par leurs valeurs, pour obtenir l'équation (1)

$$(9) \quad tg 2\alpha = \frac{\sin 2\varepsilon \cdot \sin 2\pi d}{\cos^2 2\varepsilon + \sin^2 2\varepsilon \cos 2\pi d} .$$

(1) Si on conserve k au lieu de poser $k = tg \varepsilon$, on a :

$$(9') \quad tg 2\alpha = \frac{\frac{2k}{1 - k^2} \cdot \frac{1 + k^2}{1 - k^2} \cdot \sin 2\pi d}{1 + \frac{4k^2}{(1 - k^2)^2} \cos 2\pi d}$$

avec

$$\frac{2k}{1 - k^2} = tg 2\varepsilon \quad \frac{2k}{1 + k^2} = \sin 2\varepsilon \quad \frac{1 - k^2}{1 + k^2} = \cos 2\varepsilon .$$

Or, M. Gouy a donné les relations ⁽¹⁾

$$\frac{\omega}{\pi} = 2d \frac{k}{1 + k^2}$$

$$\varphi = d \frac{1 - k^2}{1 + k^2}$$

qui peuvent s'écrire :

$$(10) \quad \begin{cases} \frac{\omega}{\pi} = d \sin 2\varepsilon \\ \varphi = d \cos 2\varepsilon \end{cases}$$

en sorte que l'expression de $tg 2\alpha$ peut s'écrire aussi sous la forme suivante :

$$(9'') \quad tg 2\alpha = \frac{\pi \omega d \sin 2\pi d}{\pi^2 \varphi^2 + \omega^2 \cos 2\pi d} ,$$

formule qui a été établie géométriquement par M. Wiener ⁽²⁾.

On voit que l'angle α est une fonction *périodique* de la différence de marche d des vibrations elliptiques et que l'angle α s'annule pour les valeurs de la double réfraction φ qui assignent à d les valeurs égales à

$$\frac{1}{2}, \quad 1, \quad \frac{3}{2}, \quad \dots \dots \dots \text{etc.}$$

L'angle α change de sens en passant par ces valeurs ; il en résulte en particulier que pour certaines séries croissantes de φ le grand axe de l'ellipse tourne en sens contraire de la rotation ordinaire du milieu.

C'est une première conséquence à tirer de la théorie des effets simultanés du pouvoir rotatoire et de la double réfraction qui sera vérifiée dans un chapitre suivant.

Il importe de vérifier aussi si le pouvoir rotatoire $\frac{\omega}{\pi}$ se con-

(1) *Journal de physique*, t. IV, p. 149, 1885.

(2) *Ann. de Wiedemann*, vol. XXXV, p. 1, 1888.

serve, et si, conformément à ce qui a été établi par Wertheim (1) pour le verre comprimé, la double réfraction φ augmente proportionnellement à la pression.

Enfin, il faut de l'étude de la vibration elliptique émergente remonter aux éléments d et k des vibrations elliptiques privilégiées. Il suffit pour atteindre ce but, d'analyser la vibration elliptique à la sortie du cristal; on a, à cet effet, employé la méthode de de Senarmont, dite du mica quart d'onde (2). Elle permet de déterminer les axes de l'ellipse par la position du mica et le rapport de ces axes par la position de l'analyseur qui permet de déterminer l'azimut de la polarisation rectiligne rétablie.

Soient α l'angle du grand axe de l'ellipse avec la vibration incidente primitive prise comme axe des x , β l'angle de la vibration rectiligne avec le même axe de l'ellipse, on a

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos 2\psi = \cos 2\alpha \cdot \cos 2\beta \\ tg 2\pi u = \frac{tg 2\beta}{\sin 2\alpha} \end{array} \right.$$

ces formules permettent de déterminer ψ et u . D'un autre côté, les paramètres de la biréfringence elliptique, c'est-à-dire la différence de marche d et le rapport des axes k et $\frac{1}{k}$ des deux vibrations privilégiées, dont l'interférence engendre la vibration elliptique émergente que l'on vient de déterminer, sont liées par les relations suivantes, démontrées dans un précédent chapitre

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos \pi d = \cos 2\pi u \cdot \cos \psi \\ tg 2\varepsilon = \frac{tg \psi}{\sin 2\pi u} \end{array} \right.$$

qui déterminent d et ε en fonction de ψ et de u et par suite en fonction de α et de β qui sont les données de l'expérience.

(1) *Ann. de Chimie et de Physique* (3), XII, 136. — Thèse de Paris, 1855.

(2) *Ann. de Chimie et de Physique* (2), LXXIII.

Les formules (10) que nous réécrivons

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\omega}{\pi} = d \sin 2\varepsilon \\ \varphi = d \cos 2\varepsilon \end{array} \right.$$

permettent alors de déterminer $\frac{\omega}{\pi}$ et φ . On a en définitive déterminé les quantités :

$$\alpha, \quad \frac{\omega}{\pi}, \quad \text{et} \quad \varphi.$$

Discussion.

L'ellipse émergente peut présenter des particularités qu'il convient de mettre en évidence, elle peut se réduire à une droite, ou à une circonférence, ou avoir ses axes l'un horizontal l'autre vertical. En même temps, le rapport des axes varie, ainsi que l'orientation de cette ellipse. L'orientation de l'ellipse est donnée par la relation (9) ou (9'); le rapport des axes est égal à

$$(13) \quad \rho = tg\beta = \frac{\sin 2\beta}{1 + \cos 2\beta};$$

il faut transformer ce rapport en fonction de ε et de d . On a (formule 11)

$$tg 2\pi u = \frac{tg 2\beta}{\sin 2\alpha}$$

avec (formule 6)

$$tg 2\pi u = \cos 2\varepsilon \cdot tg \pi d;$$

on en déduit

$$tg 2\beta = \cos 2\varepsilon \cdot tg \pi d \cdot \frac{tg 2\alpha}{\sqrt{1 + tg^2 2\alpha}};$$

il n'y a qu'à remplacer $tg 2\alpha$ par sa valeur (formule 9) et on a

$$(14) \quad tg 2\beta = \frac{\sin 4\varepsilon \cdot \sin^2 \pi d}{\sqrt{1 - \sin^2 4\varepsilon \cdot \sin^4 \pi d}}$$

ou encore

$$(15) \quad \sin 2\beta = \sin 4\varepsilon \cdot \sin^2 \pi d .$$

En définitive, l'ellipse émergente est déterminée par les deux formules

$$\left\{ \begin{array}{l} tg 2\alpha = \frac{\sin 2\varepsilon \cdot \sin 2\pi d}{\cos^2 2\varepsilon + \sin^2 2\varepsilon \cdot \cos \pi d} \\ \sin 2\beta = \sin 4\varepsilon \cdot \sin^2 \pi d \end{array} \right.$$

qui donnent les angles des axes avec la vibration incidente, ainsi que le rapport de ses axes. Cherchons les valeurs particulières de d qui correspondent à l'angle α égal à zéro.

L'angle α est nul pour

$$\sin 2\pi d = 0 ,$$

ce qui correspond à une différence de marche, en longueur d'onde, égale à

$$0 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{3}{2} \cdot 2 \cdot \dots \text{etc. ;}$$

il est du reste facile de voir que pour les valeurs

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad \dots \text{etc. ,}$$

la vibration émergente est rectiligne ; et que pour les valeurs intermédiaires

$$\frac{1}{2} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{5}{2} \quad \dots \text{etc.}$$

la vibration elliptique est rapportée à ses axes qui coïncident avec les axes de coordonnées.

En effet la vibration est rectiligne si

$$tg \psi = 0 \quad \cos 2\pi u = \pm 1 ,$$

ce qui d'après la formule (12) entraîne

$$\cos \pi d = \pm 1 ,$$

d est la différence en longueur d'onde ; ce qui exige que les valeurs de d soient :

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad \dots\dots\dots$$

Si au contraire l'ellipse a son grand axe horizontal, alors la différence de phase des constituants principaux est :

$$2\pi u = \frac{\pi}{2},$$

les formules (12) deviennent :

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos \pi d = 0 \\ tg 2\varepsilon = tg \psi \end{array} \right.$$

qui sont précisément les relations qui ont été utilisées pour l'étude de la double réfraction elliptique du quartz naturel.

La condition

$$\cos \pi d = 0$$

donne pour d , les valeurs évaluées en longueur d'onde

$$\frac{1}{2} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{5}{2} \quad \dots\dots\dots$$

La vibration émergente peut être circulaire, la différence de marche est de la forme précédente

$$\frac{2p+1}{2},$$

mais en outre on a

$$tg \psi = 1,$$

qui entraîne (d'après 17)

$$\varepsilon = \frac{\pi}{8},$$

c'est-à-dire

$$k = tg \varepsilon = tg \frac{\pi}{8} = 0,414,$$

ce qui détermine l'ellipticité des vibrations privilégiées dont l'interférence engendre une vibration circulaire.

Les formules (10) donnent alors

$$\frac{\omega}{\pi} = \varphi$$

et par suite

$$d^2 = \varphi^2 + \frac{\omega^2}{\pi^2} = \frac{(2p+1)^2}{4}$$

d'où

$$d = \varphi \sqrt{2} = \frac{\omega}{\pi} \sqrt{2} = \frac{2p+1}{2}.$$

En résumé on a

1° Une vibration émergente rectiligne avec

$$d = 2p \frac{\lambda}{2},$$

c'est-à-dire un nombre pair de demi-longueur d'onde.

2° Une vibration elliptique rapportée à ses axes, lorsque

$$d = (2p+1) \frac{\lambda}{2},$$

c'est-à-dire un nombre impair de demi-longueur d'onde.

3° Une vibration circulaire lorsque les conditions

$$d = (2p+1) \frac{\lambda}{2} \quad k = 0,414 \quad \text{et} \quad \frac{\omega}{\pi\varphi} = 1$$

sont remplies ; ce qui exige une épaisseur particulière de quartz telle que le pouvoir rotatoire $\frac{\omega}{\pi}$ satisfasse à l'égalité

$$\frac{\omega}{\pi} = \frac{2p+1}{2\sqrt{2}}.$$

Ce résultat peut du reste se déduire directement de l'étude des composantes principales de l'ellipse, que nous rappelons

$$\begin{cases} X = A \sin \xi \\ Y = B \sin (\xi + 2\pi u) \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} A^2 = \left(\frac{k}{1+k^2}\right)^2 \left[\left(k + \frac{1}{k}\right)^2 - 4 \sin^2 \pi d\right] \\ B^2 = 4 \frac{k^2}{(1+k^2)^2} \sin^2 \pi d \end{cases}$$

il faut pour avoir une vibration circulaire les deux conditions

$$A = B \quad \text{et} \quad 2\pi u = \frac{\pi}{2};$$

or l'équation suivante (6) du début de ce chapitre

$$(6') \quad tg \, 2\pi u = \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1} tg \, \pi d$$

donne en éliminant la solution étrangère $1 + k^2 = 0$

$$\pi d = \frac{\pi}{2}$$

et

$$\sin \pi d = 1.$$

On a alors en égalant les valeurs de A et de B

$$\left(k + \frac{1}{k}\right)^2 = 8$$

ou (1)

$$k^4 - 6k^2 + 1 = 0,$$

d'où les deux solutions convenables

$$k' = 1 + \sqrt{2} = \cotg \frac{\pi}{8},$$

$$k'' = -1 + \sqrt{2} = \tg \frac{\pi}{8};$$

(1) Les quatre solutions sont

$$\begin{array}{cccc} 1 + \sqrt{2} & 1 - \sqrt{2} & -1 - \sqrt{2} & -1 + \sqrt{2} \\ + & - & - & + \end{array};$$

on rejette les solutions négatives.

en effet

$$tg \frac{\pi}{8} = \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{1 + \cos \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}} = -1 + \sqrt{2} = k''$$

et

$$cotg \frac{\pi}{8} = 1 + \sqrt{2} = k' .$$

Pour la vibration circulaire, la position du mica laisse indéterminée la position des axes, mais l'indétermination est toute physique.

La formule (9) peut s'écrire :

$$(9'') \quad tg 2\alpha = \frac{\sin 2\varepsilon \cdot \sin 2\pi d}{1 - 2 \sin^2 2\varepsilon \sin^2 \pi d} ,$$

ou en tenant compte des relations (10)

$$tg 2\alpha = \frac{\pi \omega d \sin 2\pi d}{\pi^2 d^2 - 2\omega^2 \sin^2 \pi d}$$

qui prend la forme de l'indétermination pour $\sin 2\pi d = 0$, car on a aussi

$$d = \varepsilon \sqrt{2} = \frac{\omega}{\pi} \sqrt{2} = \frac{2p+1}{2} ,$$

d'où

$$tg 2\alpha = \frac{0}{0} .$$

Pour lever l'indétermination, il suffit de prendre le rapport des dérivées, on a

$$(18) \quad tg 2\alpha = -\omega$$

ou

$$(18') \quad tg 2\alpha = -\frac{2p+1}{\sqrt{8}} \pi = -(2p+1) 1,06066 \pi ;$$

ainsi l'angle α est déterminé quand la vibration est circulaire (1).

Nous nous proposons actuellement de déterminer l'angle maximum que peut atteindre α , et aussi le maximum du rapport des axes de l'ellipse émergente.

Maximum de l'angle α du grand axe de l'ellipse émergente avec la vibration incidente primitive.

Reprenons la formule qui donne l'angle 2α , à savoir :

$$tg 2\alpha = \frac{\sin 2\varepsilon \cdot \sin 2\pi d}{\cos^2 2\varepsilon + \sin^2 2\varepsilon \cdot \cos 2\pi d}$$

et écrivons que la dérivée de $tg \alpha$ est nulle ; il vient :

$$\cos 2\pi d = -tg^2 2\varepsilon = -\frac{\omega^2}{\pi^2 \varphi^2},$$

ce qui donne, pour la valeur maximum A de l'angle α , en évaluant les $\sin 2\varepsilon$, et $\cos 2\varepsilon$ en fonction de $tg 2\varepsilon$, l'expression :

$$(19) \quad tg 2A = \frac{tg 2\varepsilon}{\sqrt{1 - tg^2 2\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi^2 \varphi^2}{\omega^2} - 1}};$$

la valeur correspondante Δ de la différence de marche étant donnée par :

$$(20) \quad \cos 2\pi \Delta = -\frac{\omega^2}{\pi^2 \varphi^2},$$

on voit que les maxima, ou les minima de A n'existent qu'autant que $\frac{\pi^2 \varphi^2}{\omega^2} - 1 > 0$, c'est-à-dire qu'autant que

$$\varphi > \frac{\omega}{\pi}.$$

(1) Pour l'une de nos lames de quartz, l'épaisseur est de 0^{cm} 899311, ce qui donne pour $\frac{\omega}{\pi} = 1,097$; cette valeur est assez peu différente de 1,060 qui correspond à la vibration circulaire ; aussi, pour cette lame, trouverons-nous une vibration presque circulaire, pour une certaine pression.

Si donc, on se donne un pouvoir rotatoire constant auquel on associe une double réfraction croissante, la valeur de φ part de 0, augmente et devient égale à $\frac{\omega}{\pi}$; dans cette zone de variation, l'angle α du grand axe de l'ellipse émergente varie d'une façon continue dans le même sens (augmente ou diminue), mais pour des valeurs de φ supérieure, α varie en oscillant autour de la vibration incidente primitive, et il arrive que le grand axe de l'ellipse émergente peut, à un moment donné, tourner en sens contraire de la rotation du milieu; les maxima et les minima sont alors possibles.

Cette variation est mise en évidence par les expériences du chapitre suivant, et par les courbes qui indiquent la variation de l'angle. On a aussi construit les ellipses émergentes pour un certain nombre de valeurs de la pression exercée sur le quartz.

En même temps l'ellipticité varie; et nous allons étudier cette variation.

Recherche du maximum d'ellipticité.

Le rapport ρ des axes est donné par :

$$(13) \quad \rho = \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin 2\beta}{1 + \cos 2\beta}$$

avec

$$(15) \quad \sin 2\beta = \sin 4\varepsilon \cdot \sin^2 \pi d$$

d'où

$$(16) \quad \rho = \frac{\sin 4\varepsilon \cdot \sin^2 \pi d}{1 + \sqrt{1 - \sin^2 4\varepsilon \cdot \sin^4 \pi d}}.$$

Cherchons les maxima et minima de $\operatorname{tg} 2\beta$ en égalant à 0 la dérivée de cette quantité, on obtient

$$\left[1 + \sqrt{1 - \sin^2 4\varepsilon \cdot \sin^4 \pi d} \right] \sin 4\varepsilon \cdot \sin 2\pi d = 0 ;$$

le premier facteur donne, après élévation au carré,

$$1 - \sin^2 4\varepsilon \sin^4 \pi d = 1 ,$$

d'où

$$\sin^4 \pi d = 0 ;$$

ce sont les valeurs qui correspondent à un nombre entier de longueur d'onde, qui donnent $\sin^4 \pi d = 0$. Pour ces valeurs la vibration est rétiligne, l'équation (15) donne, en effet, $\sin 2\beta = 0$, d'où $\rho = 0$; c'est un minimum.

Le second facteur donne les maxima

$$\sin 2\pi d = 0 ,$$

c'est-à-dire assigne à d les valeurs $\frac{1}{2} \frac{3}{2} \frac{5}{2} \dots$ qui correspondent à une ellipse ayant son grand axe horizontal; la valeur de ρ est alors donnée par l'équation (16)

$$(16) \quad \rho = \frac{\sin 4\varepsilon \cdot \sin^2 \pi d}{1 + \sqrt{1 - \sin^2 4\varepsilon \cdot \sin^4 \pi d}} = \frac{\sin 4\varepsilon}{1 + \cos 4\varepsilon} = tg 2\varepsilon = \frac{\omega}{\pi \varphi}$$

en tenant compte des équations (10).

Ainsi on a pour l'ellipticité maximum

$$\rho_{\max} = \frac{\omega}{\pi \varphi} ;$$

ces maxima du reste décroissent quand φ augmente et finissent par être égaux à 0 (1).

(1) J'avais indiqué (C.-R., 21 juillet 1890) les valeurs particulières de k qui correspondent à la vibration circulaire. On a

$$k = tg \frac{\pi}{8} \quad \text{et} \quad \frac{\omega}{\pi} = \varphi \quad \text{avec} \quad d^2 = \frac{\omega^2}{\pi^2} + \varphi^2 = \frac{(2p+1)^2}{4} .$$

M. Monnory (*J. de Physique*, 2^e série, t. IX, juin 1890) a plus particulièrement insisté sur l'importance des vibrations circulaires et sur les épaisseurs convenables de quartz qu'il faut prendre pour les obtenir. — De plus, nous avons vu que lorsque $\varphi < \frac{\omega}{\pi}$ l'angle α varie continuellement dans le même sens; avec les épaisseurs de

Dans le cas de ρ maximum, on a une vérification possible, on a en effet

$$\rho = tg 2\varepsilon = \frac{\omega}{\pi\varphi}$$

et d'un autre côté (équation 12), dans le cas de la vibration elliptique à axe horizontal, on a

$$tg 2\varepsilon = tg \psi ;$$

l'observation donne l'angle ψ . On doit donc avoir comme vérification

$$\frac{\omega}{\pi\varphi} = tg \psi .$$

Dans le chapitre qui suit nous trouverons une telle ellipse avec une pression de 505 kg (quartz d'épaisseur 0,899); on a

$$\frac{\omega}{\pi} = 1,097 \quad \text{et} \quad \varphi = 2,237 \quad \text{d'où} \quad \frac{\omega}{\pi\varphi} = 0,43039$$

et d'un autre côté

$$\psi = 26^{\circ}30' \quad \text{d'où} \quad tg \psi = 0,49858 .$$

La vérification est satisfaisante.

quartz que nous avons étudiées, α augmente. M. Monnory (C.-R., 23 février 1891) a montré que, lorsque $\omega < 61^{\circ}16'59''$, α diminue; lorsque, au contraire, ω est plus grand, α augmente avant d'osciller asymptotiquement. Nous avons volontairement laissé de côté cette étude de l'influence de l'épaisseur.

Ainsi s'explique ce fait que si l'on comprime transversalement une lame de quartz normale à l'axe, la teinte plate observée en lumière parallèle monte ou descend dans l'échelle des couleurs, et cela suivant l'épaisseur (quartz épais et quartz mince). En particulier MM. Mach et Merteus (*Ann. de Pogg.*, CLVI, p. 639, 1875), complétant les expériences de Pfaff (*Ann. de Pogg.*, CXVII, p. 333 et CXVIII, p. 598), ont observé un quartz gauche en lumière parallèle; en exerçant une compression perpendiculaire à l'axe, la teinte plate obtenue change dans un sens correspondant à un accroissement de rotation. (Voir *J. de Phys.*, V, 33-231, et *Traité de Cristallographie*, Mallard, t. II, p. 545.)

CHAPITRE VII

DOUBLE RÉFRACTION ELLIPTIQUE DU QUARTZ SUIVANT LA DIRECTION DE L'AXE OPTIQUE, C'EST-A-DIRE SUIVANT UNE DIRECTION NORMALE A LA LAME DE QUARTZ, SOUMISE A UNE COMPRESSION LATÉRALE.

Ces considérations générales posées, abordons leur vérification ; considérons la lame de quartz taillée normalement à l'axe optique et comprimé latéralement par une disposition particulière que l'on va décrire et qui permet d'*associer ainsi à un pouvoir rotatoire constant une double réfraction croissante*. Le rayon de lumière polarisée est assujetti à traverser toujours normalement la lame cristallisée, en sorte que l'incidence est toujours l'incidence normale, les pressions seules sont variables. A la sortie du cristal, la vibration elliptique est analysée, comme il a été dit par la méthode de De Senarmont. Soient α l'angle de l'axe du mica avec la vibration incidente ⁽¹⁾, que nous supposerons horizontale, et A l'angle que fait avec la même direction la vibration rectiligne rétablie par le mica ; α et A sont les données de l'expérience. Si l'on désigne par a et b les amplitudes des constituants principaux suivant les axes de coordonnées ox et oy pris respectivement, l'un horizontal, l'autre vertical et par δ la différence de marche de ces deux mouvements vibratoires, en posant

$$\frac{a}{b} = \operatorname{tg} \psi$$

on peut déterminer δ et ψ par la méthode du mica, quart d'onde ;

(1) Dans ce qui précède, on a désigné par α l'angle du grand axe de l'ellipse et de la vibration incidente ; or l'axe du mica peut coïncider avec le grand ou le petit axe ; il faut distinguer.

au moyen des données de l'expérience α et β , l'angle β désignant l'angle de la vibration rectiligne rétablie avec le grand axe de l'ellipse émergente, tandis que A désigne l'angle de cette même vibration rétablie avec $o\alpha$, vibration primitive horizontale.

On a les relations établies précédemment et que nous rappelons pour fixer les notations :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos 2\psi = \cos 2\beta \cdot \cos 2\alpha \\ tg 2\pi \frac{\delta}{\lambda} = \frac{tg 2\beta}{\sin 2\alpha} \end{array} \right.$$

qui donnent ψ et δ , et les formules

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos \pi d = \cos 2\pi \delta \cdot \cos \psi \\ tg 2\epsilon = \frac{tg \psi}{\sin 2\pi \delta} \end{array} \right.$$

permettent de connaître les paramètres d et ϵ de la biréfringence elliptique du quartz ; enfin on a

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\omega}{\pi} = d \sin 2\epsilon \\ \varphi = d \cos 2\epsilon \end{array} \right.$$

qui donnent séparément $\frac{\omega}{\pi}$ et φ , c'est-à-dire la différence de marche due au pouvoir rotatoire seul et à la double réfraction seule. En résumé, l'expérience donne α et β , et on en déduit

$$d, \epsilon, \frac{\omega}{\pi} \text{ et } \varphi.$$

On peut alors soumettre au contrôle de l'observation la théorie de M. Gouy, dans le cas où à un pouvoir rotatoire constant, on associe une double réfraction croissante et vérifier : 1° si $\frac{\omega}{\pi}$ demeure constant, et 2° si φ croît proportionnellement à la pression.

Les pressions ont été obtenues au moyen d'un dynamomètre de Perreaux à essayer les tissus, modifié pour les besoins de l'expérience. Elles ont varié de 0^{kg} à 530^{kg} environ par centimètre carré. La pièce principale du dynamomètre est un châssis rectangulaire en fonte A, portant à une extrémité une pièce en forme de

fer à cheval B, sur laquelle repose un cadran gradué, et à l'autre extrémité une vis à filets carrés (fig. 16).

Deux coulisses α et α' s'ajustant dans le châssis A sont destinées à la compression de la lame de quartz ; à cet effet, la coulisse α est dirigée par la vis V et peut, à volonté, être rapprochée ou éloignée de la première α' ; celle-ci est réunie par un système de trois barres t rigides et résistantes, à une double équerre h .

Le ressort dynamométrique R, fixé sous le cadran, se compose de deux lames métalliques qui représentent, par leur forme, une courbe à peu près elliptique.

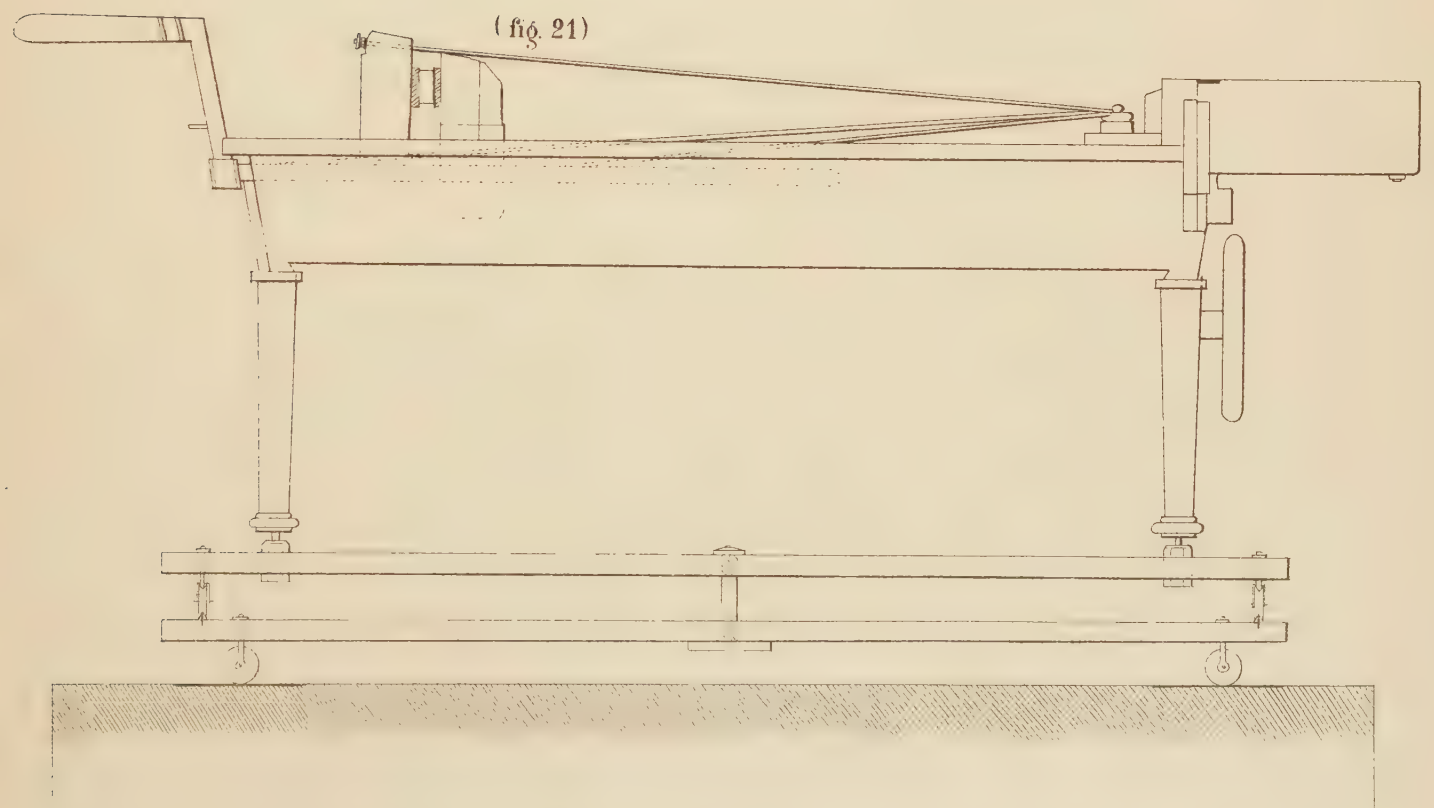
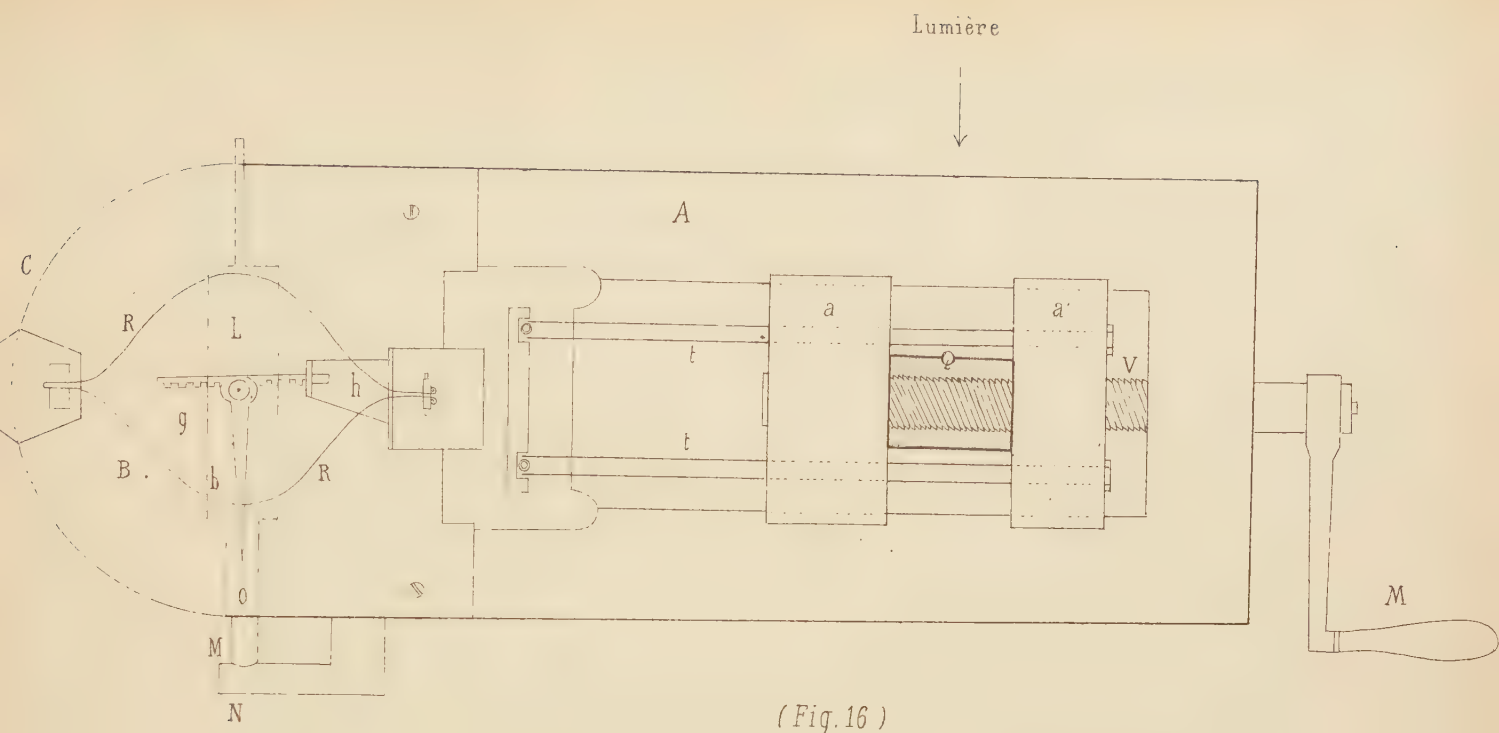
Ces deux lames sont recourbées à leur extrémité, elles sont réunies à l'aide de clavettes fortement serrées, d'un bout dans la pièce en forme de fer à cheval et de l'autre à l'une des pièces de l'équerre h .

Cette équerre h porte une règle crémaillère qui commande un pignon denté qui fait tourner l'aiguille. Lorsqu'on agit sur la manivelle, la coulisse α appuie sur le bloc de quartz et le presse contre la coulisse α' , qui, par l'intermédiaire des tringles t , bande le ressort R. On lit la pression sur le cadran ; on peut atteindre 500^{kg}.

Le dynamomètre est placé sur une double plaque de chêne, robuste. La première planche pouvant tourner autour d'un pivot vertical (le mouvement étant réglé par quatre roulettes), est guidée par un mouvement de translation de la seconde planche de chêne sur deux petits rails qui sont sur la table destinée à supporter tout le système. Enfin, les pieds du dynamomètre au lieu de reposer directement sur la plaque tournante, y repose par l'intermédiaire de vis calantes, ce qui permet d'imprimer, si besoin est, un mouvement de bascule de l'appareil (voir le dessin ci-après).

Par la combinaison de ce mouvement de bascule, du mouvement de rotation de la plaque supérieure et du mouvement de translation de la plaque inférieure, il était possible d'orienter, à chaque expérience, la lame de quartz normalement au rayon incident.

Le réglage s'effectuait par la réflexion d'un mince faisceau de lumière (obtenu par le moyen d'une faible ouverture percée dans un carton), que l'on dirigeait sur la face de la lame, et on orientait celle-



ci de façon à ce que le rayon réfléchi revint exactement sur lui-même. A chaque expérience, on vérifiait le réglage, car, en agissant sur la manivelle pour faire varier la pression, on déplaçait nécessairement le système, très mobile sur les deux plaques de bois.

Il convient d'avoir aussi une pression exactement répartie sur les parois latérales de la plaque pressée ; il faut d'abord que ces parois aient même surface ; on obtient cette première condition en usant à l'émeri les arêtes latérales, de façon à obtenir deux surfaces de contact avec les mâchoires, absolument égales.

Il faut, de plus, interposer entre les coulisses a et a' et la lame de quartz, des bandes de caoutchouc, de cuir ou de carton ; après plusieurs essais, on a dû rejeter ces corps, qui contiennent (le carton surtout) des particules solides qui constituent un obstacle à la répartition de la pression, et ne permettent pas d'avoir des franges rectilignes. Le meilleur procédé consiste à fabriquer un carton bien homogène ; on y arrive en collant des cartons de papier bristol au moyen d'une colle d'amidon bien fine, on superpose ainsi un certain nombre de ces cartes (de visite), de façon à avoir une épaisseur convenable. On comprime le tout et on laisse sécher ; ce sont des bandes ainsi préparées qui sont interposées entre les mâchoires a et a' et le cristal de quartz. La compression se transmet très régulièrement et les franges d'interférence observées ont un aspect bien linéaire.

L'ensemble de l'appareil est alors constitué par les pièces suivantes :

- 1° Le polariseur ;
- 2° Le quartz comprimé par le dynamomètre ;
- 3° Le mica, quart d'onde, mobile dans sa monture ; cette pièce se meut sur un limbe gradué, muni d'un vernier ;
- 4° La fente du spectroscopie ; la fente est munie du quartz à deux rotations (et derrière la fente se trouve l'analyseur) ;
- 5° L'analyseur ;
- 6° Le spectroscopie, dont la lunette est munie d'une fente oculaire.

La lumière étant polarisée dans un azimuth donné, horizontalement par exemple, on produit une pression donnée en agissant sur la manivelle qui commande les coulisses α et α' ; ensuite on agit sur le mica et l'analyseur, alternativement sur l'un et l'autre, de façon à amener une bande noire sur la raie D ensuite agissant sur l'analyseur, on amène à l'égalité de teinte la partie supérieure et inférieure de la frange préalablement isolée par la fente oculaire de la lunette du spectroscope. — On recommence à agir sur le mica, et on revient à l'analyseur, et ainsi de suite par une série de retouches partielles.

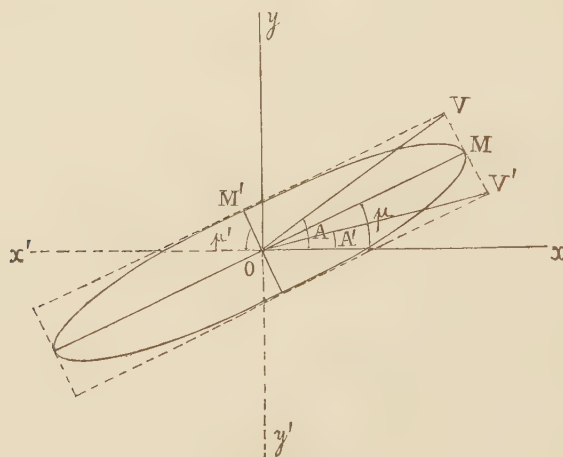


Fig. 7.

On lit l'angle μ de l'axe du mica (par exemple OM) avec Ox vibration primitive horizontale ; et l'angle A de la section principale de l'analyseur avec la verticale, c'est-à-dire l'angle de la vibration rectiligne rétablie, et de Ox . L'angle β qui entre dans les formules est l'angle $\beta = A - \mu$.

On tourne le mica de 90° , l'axe prend la position OM' , on lit l'angle μ' de Om' et de Ox' ; la vibration rectiligne rétablie est OV' , et l'angle $\beta = \mu - A' = \frac{\pi}{2} - \mu' - A'$.

Dans chacune de ses positions, il est bon de répéter les mesures avec le mica et l'analyseur ; on en prend les moyennes, on a

$$\text{Angle du grand axe avec } Ox = \mu \quad \text{ou} \quad \frac{\pi}{2} - \mu'$$

$$\text{Angle du petit axe avec } Ox' = \mu' \quad \text{ou} \quad \frac{\pi}{2} - \mu$$

et pour l'angle β les valeurs $A - \mu$ ou $\frac{\pi}{2} - \mu' - A'$ on prend, pour définir le grand axe, l'angle

$$\frac{\pi}{4} + \frac{\mu - \mu'}{2}$$

et pour définir le petit axe

$$\frac{\pi}{4} - \frac{\mu - \mu'}{2}.$$

L'angle β est pris égal à

$$\beta = \frac{\pi}{4} + \frac{A - A'}{2} - \frac{\mu + \mu'}{2}.$$

Donnons comme exemple une expérience (19 février) :

1 ^{re} position du mica	$\mu = 43^\circ$	$A = 24^\circ 30'$
	$\mu = 42^\circ$	$A = 23^\circ 30'$
Moyenne	$\mu = 42^\circ 30'$	$A = 24^\circ$
2 ^e position du mica	$\mu' = 46^\circ$	$A' = 71^\circ$
	$\mu' = 48^\circ$	$A' = 73^\circ 30'$
Moyenne	$\mu' = 47^\circ$	$A' = 72^\circ 15'$

on a alors pour définir l'angle du grand axe avec Ox

$$\frac{\pi}{4} + \frac{\mu - \mu'}{2} = 42^\circ 45'$$

et pour l'angle du petit axe et de Ox'

$$\frac{\pi}{4} - \frac{\mu - \mu'}{2} = 47^\circ 15',$$

et pour l'angle β

$$\beta = 24^{\circ}22'30'' \text{ (1).}$$

Si on représente par α l'angle du grand axe de l'ellipse, les éléments du calcul sont alors :

$$\begin{cases} \alpha = 42^{\circ}45' \\ \beta = 24^{\circ}22'30''; \end{cases}$$

on en déduit, comme il vient d'être dit,

$$d = 1,333, \quad k = 0,493, \quad \frac{\omega}{\pi} = 1,058, \quad \varphi = 0,811.$$

Les mesures ont porté sur deux lames de quartz, taillées normalement à l'axe et d'épaisseur différente, environ 0^{cm}89 pour l'une et 0^{cm}59 pour l'autre; la première est un quartz vert dextrogyre, le second est un quartz rouge levogyre. Le tableau suivant donne les résultats relatifs au quartz droit. L'angle β est affecté du signe + quand l'axe du mica est dans l'angle xoy et du signe — quand il est dans l'angle xoy' ; la même remarque s'applique à l'angle A qui donne l'azimut de la polarisation rétablie.

Dans ce tableau, la différence de marche due à la double réfraction seule, a été calculée, tout d'abord, par une simple interpolation au moyen de deux expériences faites sous des pressions différentes, d'après Wertheim les différences de marche doivent être proportionnelles à la pression, ce que l'expérience vérifie; si on construit la courbe obtenue en prenant comme abscisses les pressions et comme

$$(1) \beta = \frac{A - A'}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{\mu + \mu'}{2} = 24^{\circ}7'30'' + 45^{\circ} - 44^{\circ}45' = 24^{\circ}7'30'' + 0^{\circ}15'.$$

Le terme $\frac{\pi}{4} - \frac{\mu + \mu'}{2}$ est un terme correctif peu différent de 0; en effet, $\mu + \mu'$ est peu différent de $\frac{\pi}{2}$. Avec une mesure absolument exacte ce terme est égal à 0, alors $\beta = \frac{A - A'}{2}$, ce qui est évident, car on a $\beta = A - \mu = \mu - A'$, d'où $2\beta = A - A'$ et $A + A' = 2\mu$.

ordonnées les valeurs de φ on a une ligne droite, dont il est facile d'avoir l'équation ; c'est ainsi qu'ont été obtenues les quantités φ de l'avant-dernière colonne.

TABLEAU A.

Quartz D. $e = 0^{\text{cm}} 899331 \quad \frac{\omega}{\pi} = 1,097$ (d'après l'épaisseur).

PRESSION en kg. eq. environ.	α	A	d	k	$\frac{\omega}{\pi}$	φ obs.	φ interpolé	φ calc.	$\varphi_{\text{obs}} - \varphi_{\text{calc}}$	
0 kg	— 16°	— 16°	1,097	1	1,097	0	0	»		
50	— 22° 15'	— 20° 40'	1,126	0,831	1,107	0,207	0,219	0,184	+0,023	
100	— 33° 5'	— 41° 35'	1,234	0,679	1,147	0,455	0,439	0,409	+0,045	
240 (1)	Mal déterminé.		1,500	0,414	1,060	1,060	»	0,949	+0,110	} Vibration quasi circulaire.
300	+ 28	+ 44° 30'	1,764	0,406	1,231	1,263	1,317	1,309	—0,046	
360	+ 8	+ 6° 30'	1,925	0,339	1,117	1,528	1,580	1,579	—0,051	
380 (2)	+ 0	0	2,000	0,317	1,097	1,672	1,666	1,669	+0,003	} Vibration rectiligne.
460	— 15	+ 1° 30'	2,308	0,238	1,040	2,061	2,020	2,029	+0,032	
505	+ 0	+ 26° 30'	2,500	0,235	1,115	2,237	2,217	2,231	+0,006	} Vibration elliptique à axe horizontal.
520	+ 3° 30'	+ 28° 30'	2,529	0,224	1,080	2,286	2,283	2,299	—0,013	
530	+ 8°	+ 31° 31'	2,572	0,205	1,096	2,327	admis	2,344	—0,017	

(1) La pression de 240 kg donne une vibration à peu près circulaire ; pour une telle vibration, on a, en effet :

$$\frac{\omega}{\pi} = \varphi = \frac{2\rho + 1}{\sqrt{8}} = 1,0606 ;$$

or, le pouvoir rotatoire de la lame étant de 1,097, on ne peut obtenir une vibration circulaire, mais quasi-circulaire.

(2) Pour la vibration rectiligne ($P = 380 \text{ kg}$), on a calculé φ en admettant $\frac{\omega}{\pi} = 1,097$ et appliquant la relation

$$\varphi^2 = d^2 - \frac{\omega^2}{\pi^2} ;$$

d est déterminé en effet par les formules. Pour la valeur de k , on a employé la

Le tableau suivant est relatif à l'autre lame de quartz.

TABLEAU B.

$$e = 0^{\text{cm}} 598178$$

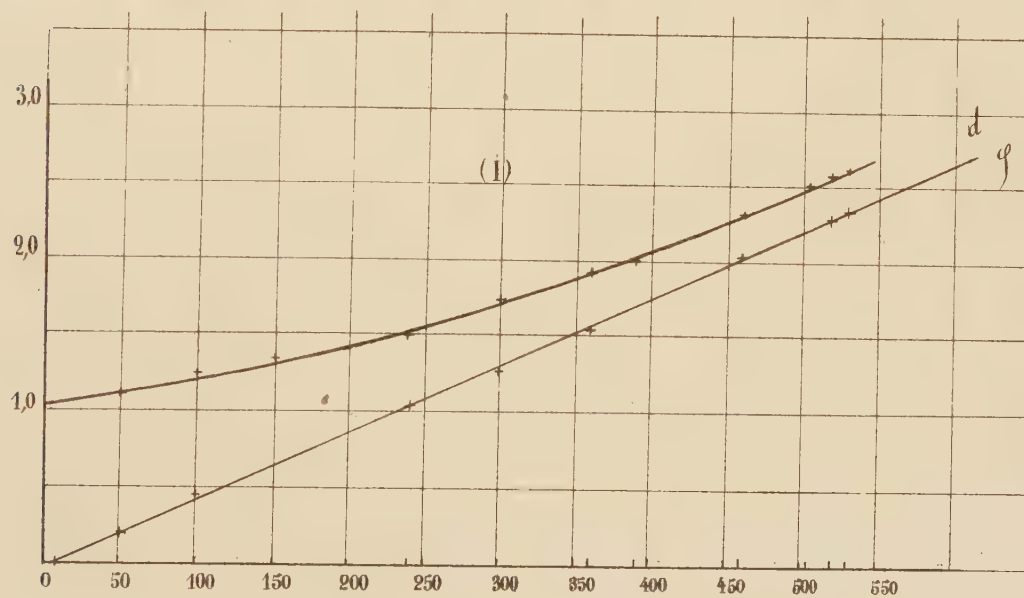
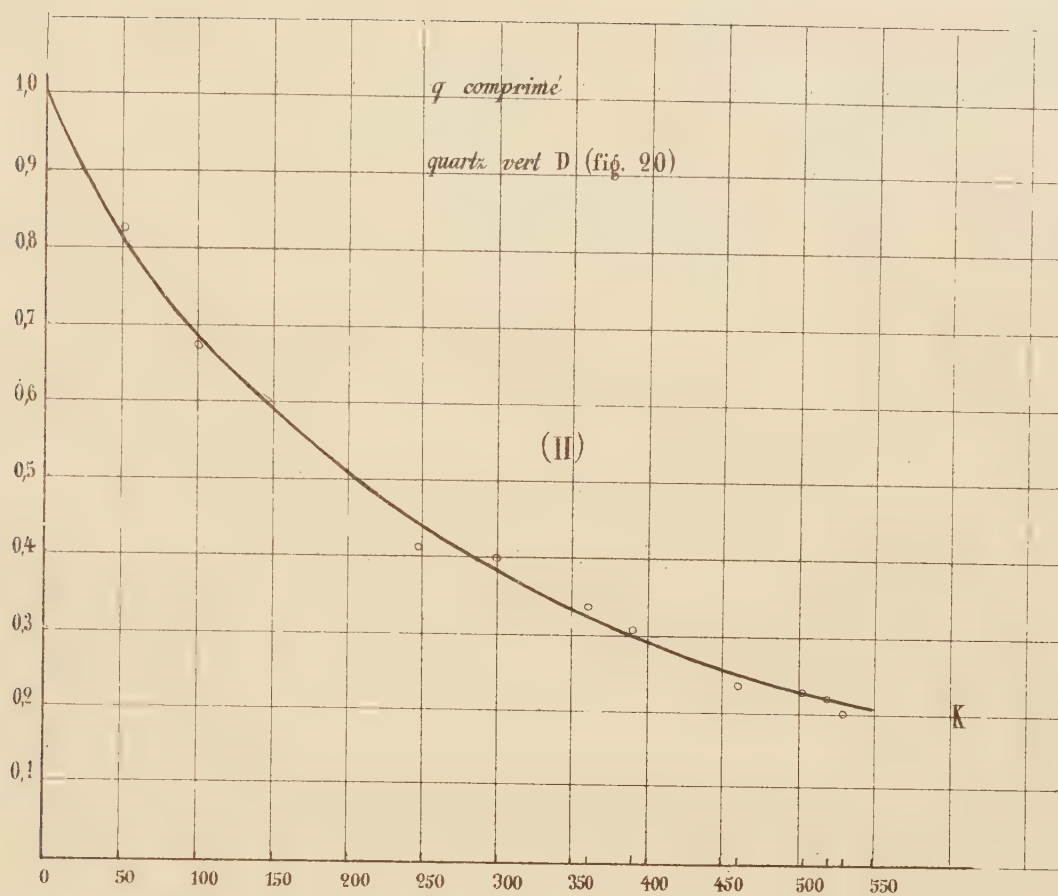
Quartz G.

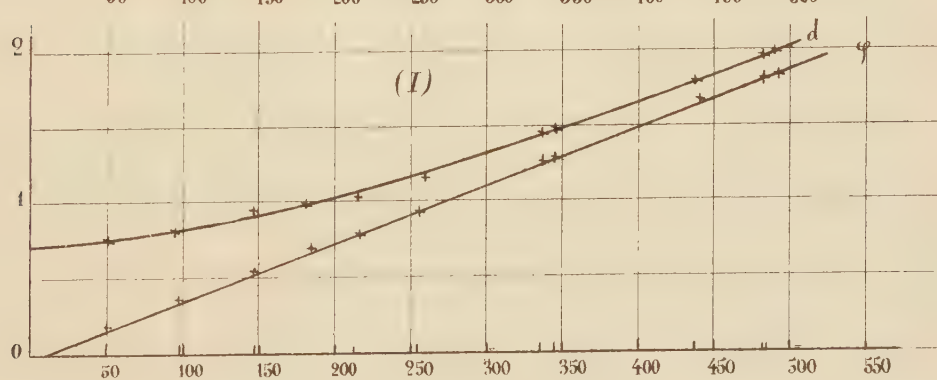
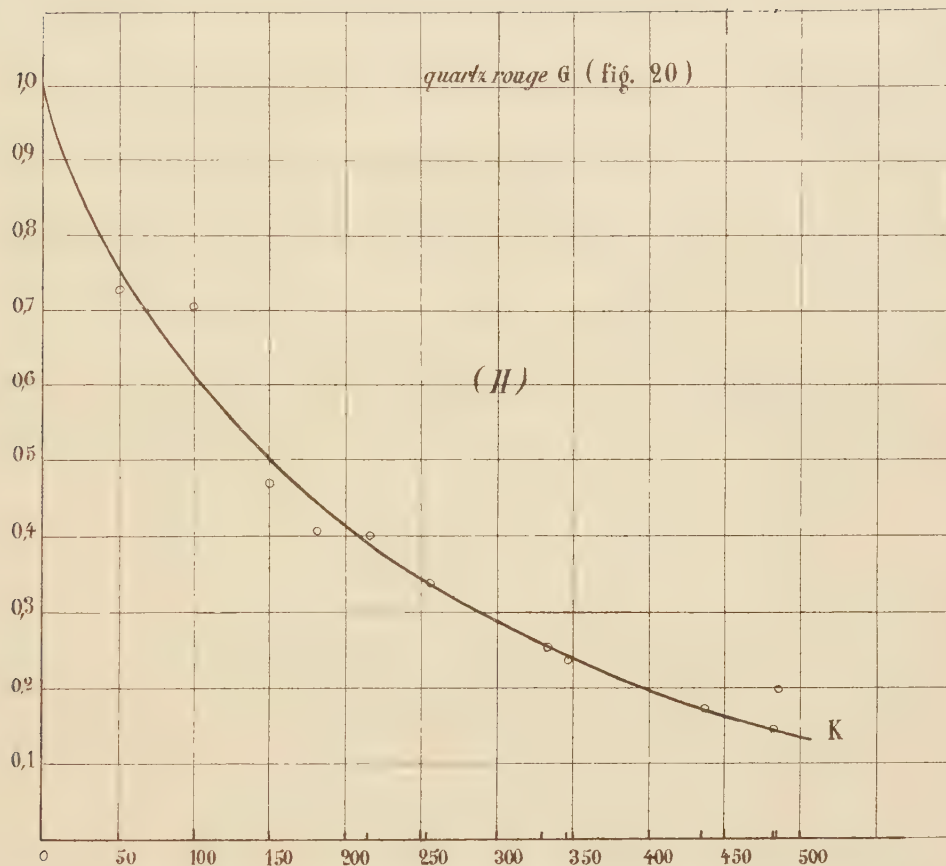
$$\frac{\omega}{\pi} = 0,719$$

P	α	A	d	k	$\frac{\omega}{\pi}$	φ obs.	φ interpolé	φ calc.	$\varphi_{\text{obs}} - \varphi_{\text{calc}}$	
0kg	— 51°	+ 39°	0,719	1	0,719	0	0	»		
50	— 40°	+ 32° 15'	0,763	0,729	0,726	0,233	0,195	0,187	+ 0,046	
96,5	— 27° 18'	+ 22° 20'	0,833	0,717	0,674	0,447	0,397	0,371	+ 0,076	
147,5	— 11° 30'	+ 9° 30'	0,910	0,469	0,675	0,572	0,576	0,572	$\pm 0,000$	
182	0°	0°	1,000	0,410	0,719	0,695		0,720	— 0,025	Vibration rectiligne.
212,5	+ 11° 45'	— 9° 40'	1,097	0,404	0,736	0,825	0,830	0,830	— 0,005	
255	+ 21° 30'	— 15° 45'	1,223	0,345	0,761	0,961	0,997	0,998	— 0,037	
335	+ 13° 50' 45''	— 25° 48' 37''	1,494	0,260	0,719	1,310	admis	1,315	— 0,005	
342,5	0°	— 26° 59'	1,500	0,240	0,719	1,316		1,356	— 0,040	} Vibration elliptique à axe horizontal.
437,5	— 6° 45'	+ 7° 45'	1,856	0,178	0,639	1,726	1,710	1,721	+ 0,005	
482	0°	0°	2,000	0,150	0,719	1,866		1,897	— 0,031	Vibration rectiligne.
485	+ 5° 18'	— 4° 18'	2,007	0,206(?)	0,761	1,802(?)	1,896	1,909	— 0,107	

Les résultats des tableaux A et B ont été traduits par les courbes I et II, ci-après (fig. 20). Les pressions sont portées en abscisses dans les courbes (I) on a pris comme ordonnées les valeurs de d et de φ ; et dans la courbe (II) celle de k . Les courbes qui représentent les différences de marche φ (double réfraction seule) sont

courbe des observations (courbe II); les formules présentent, dans ce cas, une indétermination. — On peut aussi relever seulement k sur la courbe, et, d étant calculé, avoir à la fois $\frac{\omega}{\pi}$ et φ d'après les relations (3) du début de ce chapitre.





rectilignes, ainsi que cela devait être. On peut les représenter par une équation de la forme

$$\varphi = a + bP.$$

on a déterminé a et b par la méthode des moindres carrés

$$\text{Quartz D} \dots\dots \varphi = -0,0409 + 0,0045 P$$

$$\text{Quartz G} \dots\dots \varphi = -0,0114 + 0,0040 P$$

Les droites ne passent pas par l'origine, à cause de l'inertie des bandes de carton interposées entre le quartz et les mâchoires de compression, il y a un retard dans la transmission de la pression. Si on cherche la pression P qui donne $\varphi = 0$, on en déduit le retard de la pression.

On trouve :

$$\text{Quartz D} \dots\dots 9^{\text{kg}} 9 \quad \text{c'est à dire} \quad 10^{\text{kg}} \text{ environ}$$

$$\text{Quartz G} \dots\dots 2^{\text{kg}} 8 \quad \quad \quad \gg \quad \quad \quad 3^{\text{kg}} \quad \gg$$

Pour corriger l'inertie du carton, il faut donc, dans le tableau A, retrancher 10^{kg} de chaque valeur de P et dans le tableau B en retrancher 3^{kg} . Le coefficient de proportionnalité de φ avec la pression est alors

$$\text{Pour le quartz D} \dots\dots b = 0,0045$$

$$\quad \quad \quad \gg \quad \quad \text{G} \dots\dots b = 0,0040$$

c'est-à-dire sensiblement le même pour les deux échantillons.

Nous avons vu, que lorsque l'ellipse émergente a son grand axe horizontal, on doit avoir l'égalité $\frac{\omega}{\pi\varphi} = tg\psi$. Effectuons cette vérification. Pour le quartz D on a une pareille ellipse pour $P = 505^{\text{kg}}$, et pour le quartz G pour $P = 342^{\text{kg}}$ 5. On a :

$$\text{Quartz D.} \quad \frac{\omega}{\pi} = 1,097 \quad \varphi = 2,237 \quad \psi = A = 26^{\circ} 30'$$

d'où :

$$\frac{\omega}{\pi\varphi} = 0,43039 \quad \text{et} \quad tg\psi = 0,49858.$$

$$\text{Quartz G.} \quad \frac{\omega}{\pi} = 0,719 \quad \varphi = 1,316 \quad \psi = A = 26^{\circ}59'$$

d'où :

$$\frac{\omega}{\pi\varphi} = 0,54636 \quad \text{et} \quad tg\psi = 0,50916 .$$

La vérification est satisfaisante. — Ce sont ces ellipses particulières qui nous ont permis, dans le cas du quartz non comprimé, de déterminer les paramètres de la biréfringence elliptique. Pour de pareilles ellipses, on a (en rappelant que l'on a posé $h = \frac{\pi\varphi}{\omega}$)

$$\frac{\omega}{\pi\varphi} = \frac{1}{h} , \quad \text{d'où} \quad h = \frac{1}{tg\psi} = \frac{1}{tg2\varepsilon} = \frac{1 - tg^2\varepsilon}{2tg\varepsilon} = \frac{1 - k^2}{2k}$$

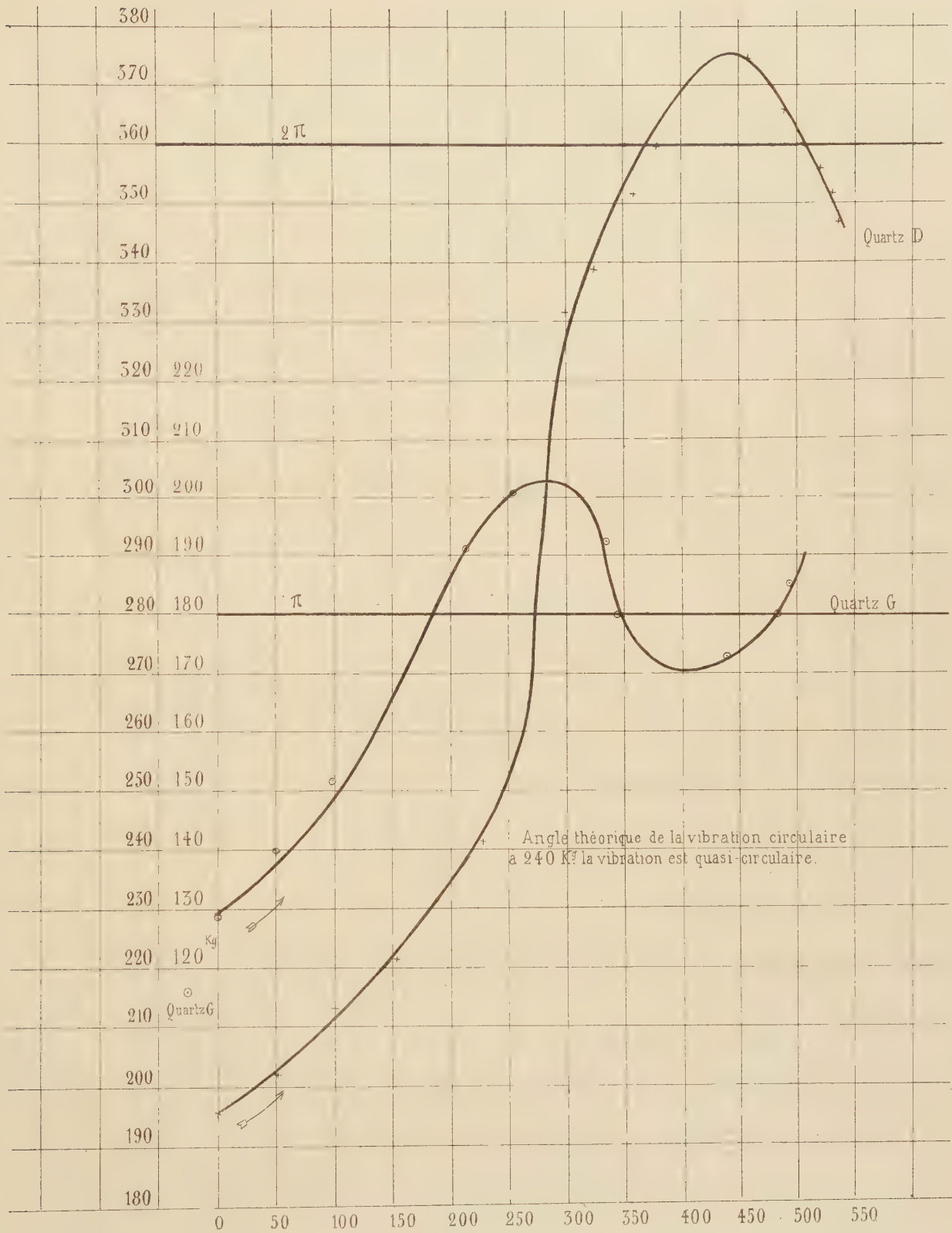
d'où

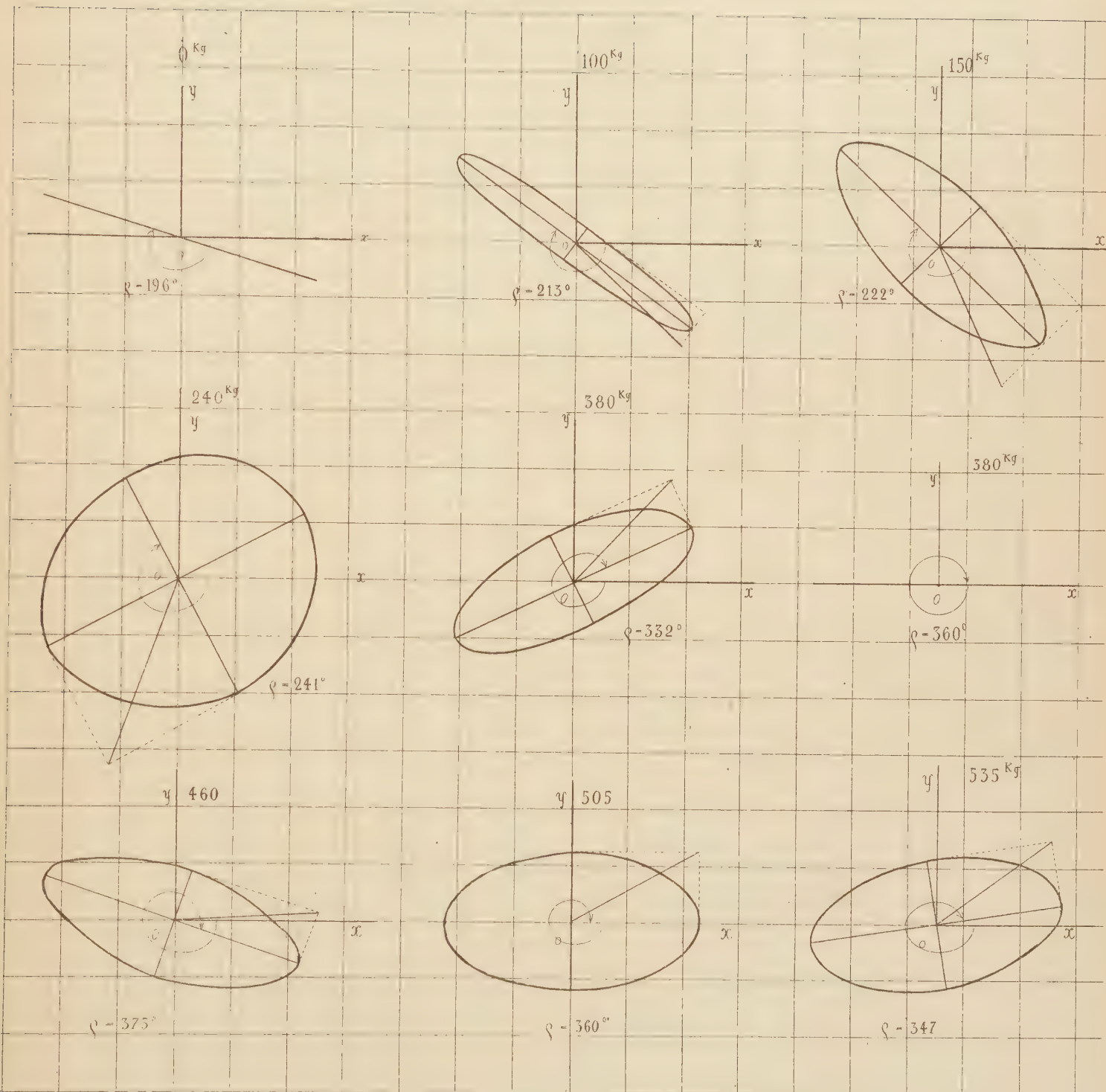
$$k = -h \pm \sqrt{h^2 + 1} ,$$

ce qui est précisément la forme donnée par M. Gouy permettant d'exprimer les ellipticités k et $\frac{1}{k}$ des vibrations privilégiées en fonction de h rapport de la différence de marche $\frac{\omega}{\pi}$ due au pouvoir rotatoire seul, à la différence de marche φ due à la double réfraction seule.

Nous avons encore, dans le chapitre précédent, montré que l'angle α est une fonction périodique de d et par suite varie avec φ , ou, ce qui revient au même, avec la pression P . Nous donnons, ci-après, l'angle du grand axe de l'ellipse avec la vibration primitive et la pression correspondante. Pour une pression nulle, le premier angle donné par le tableau mesure le pouvoir rotatoire naturel de la lame, il est de 196° environ pour le quartz D et de $129^{\circ}25'$ pour le quartz G.

(III) (Fig.18)





IV. (Fig 19)

Quartz D ↘		Quartz G ↗	
P	ρ	P	ρ
0 kg.....	196°	0 kg.....	129° 25' 12"
50	202° 15'	50.....	140°
100	213° 5'	96,5.....	152° 42'
150	222°	147,5.....	168° 30'
300	332°	182.....	180°
325	339° 6'	212,5.....	191° 45'
360	352°	255.....	201° 30'
380	360°	335.....	193° 50' 45"
460	375°	342,5.....	180°
490	366°	437,5... ..	173° 15'
505	360°	482.....	180°
520	356° 30'	485.....	185° 18'
530	352°		
535°.....	347°		

Les courbes III (fig. 18) traduisent les tableaux précédents.

On voit que dans les deux cas l'angle ρ du grand axe avec ox , augmente avec la pression, oscille autour de $2\pi = 360^\circ$ pour le quartz D, et autour de $\pi = 180^\circ$ pour le quartz G.

A l'inspection de la courbe III, quartz D, on constate la rapide variation de l'angle du grand axe de l'ellipse émergente aux environs de l'expérience qui correspond à la pression de 240 kg; c'est en effet ce qui doit être, la vibration pour une telle pression étant quasi-circulaire (1).

La planche IV (fig. 19) donne pour le quartz D, un certain nombre d'ellipses émergentes, qui mettent en évidence la rotation du grand axe, et son oscillation autour de la valeur $2\pi = 360^\circ$.

On constate que le grand axe est horizontal (l'ellipse pouvant

(1) Quand on passe par une vibration circulaire, il y a, en effet, une variation brusque de $\frac{\pi}{2}$. (Monnory, *J. de Phys.*, 2^e série, t. IX, juin 1890.)

d'ailleurs se réduire à une droite), lorsque la pression est telle que la valeur de φ (différence de marche due à la double réfraction seule) assigne à d (différence de marche des vibrations d'Airy) une valeur égale à un multiple d'une demi-longueur d'onde (1).

En résumé, dans ce chapitre, on a vérifié, sur deux lames d'épais-

(1) La théorie de la superposition des effets simultanés du pouvoir rotatoire et de la double réfraction, exposée tout d'abord analytiquement par M. Gouy (*J. de Phys.*, t. IV, p. 149, 1885) et plus tard par M. Wiener sous une forme géométrique (*Wied. Ann.*, t. XXXV, p. 19, 1888), a été reprise par M. Ward (*Proceeding of the royal Society*, t. XLVI, p. 65, 1889) et appliquée à l'étude de la rotation magnétique du plan de polarisation dans les corps birefringents.

Prenons trois axes de coordonnées, la lumière se propageant suivant oz à travers le cristal, ox étant dans la section principale et oy étant perpendiculaire à ox . Soit une vibration rectiligne faisant avec ox un angle i , après le passage à travers une épaisseur z la vibration est devenue elliptique et ses constituants principaux suivant ox et oy ont une différence de phase égale à β , l'angle α du grand axe de cet ellipse avec ox est donné par

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \operatorname{tg} 2i \cos \beta$$

à une variation d'épaisseur dz , correspond la variation suivante $d\alpha$:

$$d\alpha = -\frac{1}{4} \sin 4\alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot d\beta$$

On peut regarder cette transformation finale produite à travers le chemin dz comme due à deux causes distinctes dont les effets se superposent :

1° La double réfraction seule; $d\beta$ est alors de la forme

$$d\beta = \Phi dz,$$

Φ étant la différence de phase due à la birefringence seule, pour une épaisseur unité; (on a $\Phi = 2\pi \frac{\varphi}{\lambda}$, φ ayant la signification déjà indiquée).

2° Le pouvoir rotatoire, qui fait tourner simplement sans déformation, les axes de l'ellipse de l'angle ωdz , ω étant la rotation pour l'unité d'épaisseur, ce qui correspond à une différence de phase $2\omega dz$ (différence de marche $= \frac{\omega}{\pi} dz$).

La rotation due aux deux effets combinés prend alors la forme :

$$d\alpha = -\frac{1}{4} \Phi \sin 4\alpha \cdot \operatorname{tg} \beta dz + \omega dz.$$

M. Ward pose :

$$\beta = \Phi z,$$

ne faisant intervenir, par conséquent, dans la variation de β , que l'effet du à

seurs différentes, que lorsqu'on associe à un pouvoir rotatoire constant, une double réfraction croissante, le quartz présente pour un rayon tombant toujours normalement à la lame (suivant l'axe optique) les phénomènes de la double réfraction elliptique et que, conformément aux idées de M. Gouy :

la double réfraction seule, tandis que β dépend aussi de l'effet du pouvoir rotatoire.

On trouve alors l'équation différentielle :

$$d\alpha = -\frac{1}{4}\Phi \sin 4\alpha \cdot \operatorname{tg} \Phi z \, dz + \omega dz$$

qui est le point de départ de la théorie de M. Ward.

En supposant un faible champ magnétique, et par suite un faible pouvoir rotatoire magnétique, on arrive à exprimer la rotation α du grand axe de l'ellipse en fonction des lignes trigonométriques de Φz , sous la forme approchée suivante

$$\alpha = \frac{2\omega}{\Phi} \log. \frac{\operatorname{tg} \left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\Phi z \right) + \operatorname{tg}^2 2i \sin \Phi z}{\sec \Phi z + \operatorname{tg}^2 2i \cos \Phi z};$$

si la vibration primitive est horizontale $i = 0$, on a :

$$\alpha = \frac{2\omega}{\Phi} \log. \frac{\operatorname{tg} \left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\Phi z \right)}{\sec \Phi z};$$

on voit que $\alpha = 0$ (rotation magnétique nulle) pour

$$\Phi z = \frac{\pi}{2},$$

c'est à dire lorsque la différence de phase due à la double réfraction seule est égale à $\frac{\pi}{2}$; or, nous avons trouvé que l'angle α est nul (ou égal à $m\pi$) pour une dif-

férence de phase des vibrations d'Airy égale à un multiple de π . Pour un faible pouvoir rotatoire magnétique cette différence de phase diffère peu de celle due à la double réfraction seule, de sorte que l'angle α est nul lorsque cette différence de phase est égale à π ou à un multiple de π , résultat différent de celui auquel conduit la théorie de M. Ward, mais que l'expérience, ainsi qu'il résulte de ce qui précède (tableaux A et B), a pleinement confirmé. Voir à ce sujet :

WEDDING. Rotation magnétique du plan de polarisation par la double réfraction croissante dans le verre dilaté (*Wied. Ann.*, t. XXXV, p. 25, 1889). — CHAUVIN. Recherches sur la polarisation rotatoire magnétique du spath d'Irlande (Thèse de doctorat, Paris, et *J. de Phys.*, t. IX, 1890). — BEAULARD. Sur la double réfraction elliptique que présente le quartz comprimé (C.-R., 21 juillet 1890). — WIENER et WEDDING. Remarques sur le mémoire de A.-W. Ward (*Proceeding of the royal Society*, t. XLVII, déc. 1889, mai 1870. *J. de Phys.*, t. X, mai 1891, p. 232).

1° Le pouvoir rotatoire $\frac{\omega}{\pi}$ reste constant, aux erreurs expérimentales près.

2° La différence de marche φ , due à la double réfraction seule, est proportionnelle à la pression, ce qui devait être, et ce qui est par suite un contrôle important.

3° L'angle α du grand axe de l'ellipse émergente, et de la vibration incidente primitive, croit d'abord avec la pression (pour les épaisseurs de quartz étudiées), pour osciller ensuite autour de la vibration incidente, en sorte qu'à un moment donné, ce grand axe tourne en sens contraire du pouvoir rotatoire naturel de la lame de quartz.

CHAPITRE VIII

SUR LA BIAxie DU QUARTZ COMPRIMÉ

Le quartz comprimé présente tous les caractères des cristaux biaxes. Les premières observations à ce sujet, sont dues à Brewster ⁽¹⁾ qui avait remarqué que la compression latérale exercée sur une lame de ce cristal, perpendiculaire à l'axe, déforme les anneaux ; ces résultats furent vérifiés par Pfaff ⁽²⁾ qui observa la transformation des anneaux circulaires en lemniscates. Moigno et Soleil ⁽³⁾ ont aussi observé les lemniscates du quartz comprimé, et constaté que la ligne qui joint les centres des lemniscates, autrement dit, que le plan des axes reste parallèle à la compression. Dans le cas d'un cristal négatif, le plan des axes est perpendiculaire à la direction de la compression.

Dans la compression exercée perpendiculairement à l'axe du cristal, le milieu acquiert trois plans de symétrie rectangulaires, l'un perpendiculaire à l'axe ; un autre à la direction de compression et le troisième perpendiculaire au plan des deux premiers. L'ellipsoïde inverse cesse d'être de révolution ; soit n_e l'axe de révolution et n_o l'axe équatorial de cet ellipsoïde. Suivant la direction de la pression n_o diminue et devient $n_o - D$. L'axe équatorial normal à la compression devient $n_o - d$ et l'axe de révolution prend pour valeur $n_e - d'$. Les quantités d et d' sont en général différentes entr'elles puisque les élasticités optiques ou mécaniques sont diffé-

(1) *Edinburg. Trans.*, t. VIII, p. 281, 1817.

(2) *Ann. Pogg.*, CVII, 333, et CVIII, 596 ; et *Annales de Physique et de Chimie*, [3], t. LVII, p. 509, 1859.

(3) C.-R., t. XXX, p. 361, 1850.

rentes suivant les deux directions, néanmoins d et d' sont inférieurs à D , et D, d, d' sont des quantités très petites (1). Posons

$$a = \frac{1}{n_o - D} \quad b = \frac{1}{n_o - d} \quad c = \frac{1}{n_e - d'}$$

avec $a > b > c$.

Si l'on néglige les carrés de D, d, d' et si on désigne par V le demi-angle des axes optiques, on a :

$$\operatorname{tg}^2 V = \frac{D - d}{n_e - n_o}$$

qui donne V en fonction de $D - d$, quantité que l'expérience peut déterminer.

Je me suis proposé, dans ce chapitre, d'étendre aux biaxes la vérification de la théorie de M. Gouy.

Le quartz (2) a été fortement serré au moyen de la pince à compression de Wertheim, après interposition de lanières de carton pour avoir une répartition régulière de la pression. — Cette pince

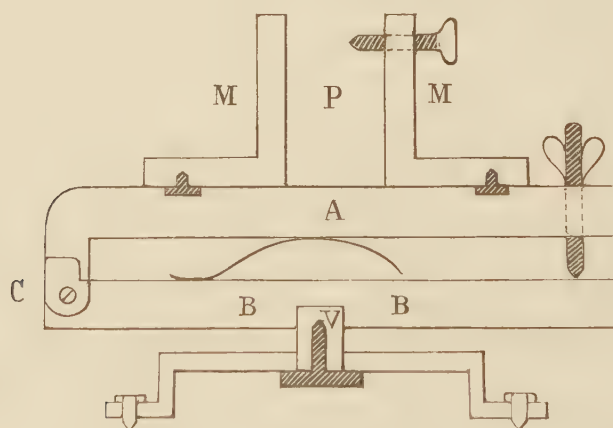


Fig. 21.

(1) Nous employons la notation de M. Mallard — *Traité de cristallographie*, t. II, p. 342.

(2) C'est la lame d'épaisseur 0^{cm} 899311.

pouvait à son tour être serrée, entre quatre montants verticaux M en cuivre (*fig. 21*), dressés perpendiculairement à une plaque de cuivre A et B formée de deux parties, s'appliquant une sur l'autre, grâce à un mouvement de charnière C horizontal : cette plaque de cuivre était mobile autour d'un axe vertical V, et pouvait se visser sur le limbe gradué qui avait servi aux expériences antérieures. On pouvait, grâce au double mouvement de rotation et de bascule, orienter la lame de quartz, par rapport au rayon de lumière incidente. La lumière polarisée par un Nicol tombait sur le cristal, orienté sur le limbe, puis sur le mica quart d'onde et enfin au-delà de ce dernier, sur la fente du spectroscope disposé comme dans les mesures précédentes. On déterminait les paramètres de la biréfringence elliptique, par l'étude de la vibration elliptique émergente, dont les éléments étaient donnés par la méthode de de Sénarmont déjà décrite. On effectuait une première mesure sous l'incidence normale, ensuite on inclinait la pince plus ou moins obliquement sur le rayon de lumière, et on déterminait les éléments du problème, pour cette incidence déterminée ; le tableau suivant donne quelques résultats.

Les angles A et M définissent les orientations de l'analyseur et du mica. La lumière incidente a été polarisée horizontalement, il en résulte que M représente l'angle que fait l'axe du mica avec la vibration incidente et que A est l'angle de la vibration rectiligne rétablie avec la section principale du quartz, laquelle est horizontale.

$\frac{\omega}{\pi} \varphi$ d et k ont les significations précédemment définies.

TABLEAU A.

i	A	M	$\frac{\omega}{\pi}$	φ	d	k
0°	25° 45'	40° 52' 30"	1,035	0,837	1,332	0,477
1°	30° 15'	40° 10'	1,060	0,751	1,305	0,520
2°	23°	41° 24' 15"	1,092	0,661	1,299	0,574
3°	25° 30'	34° 30'	1,103	0,517	1,218	0,635
7° 24'	27° 15'	30° 45'	1,070	0,388	1,193	0,722
8°	28° 30'	36°	1,053	0,668	1,265	0,552
9°	36°	47°	1,001	1,039	1,443	0,403
10°	55°	66° 30'	1,091	1,304	1,701	0,364

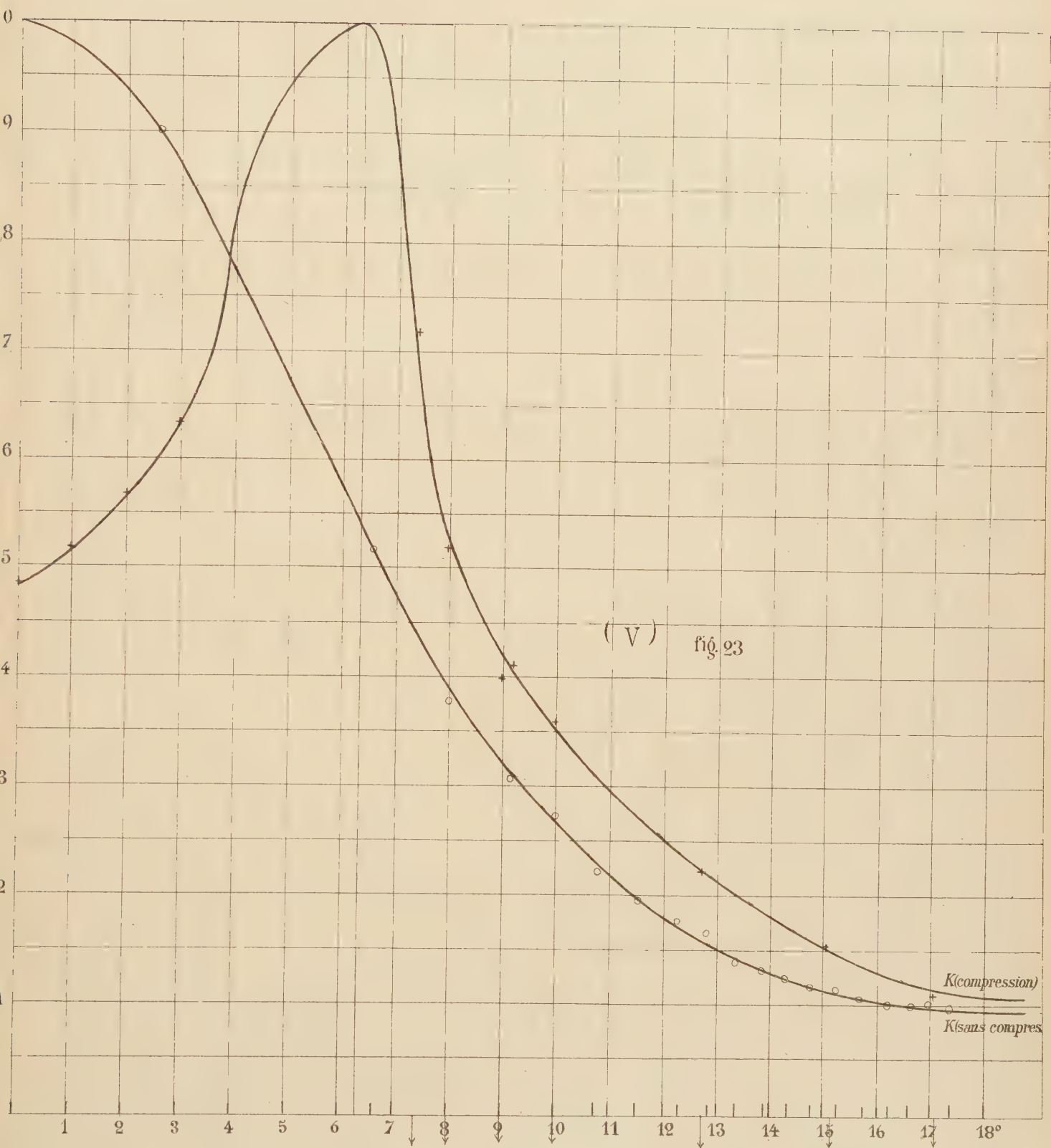
La valeur de $\frac{\omega}{\pi}$ déduite de l'épaisseur est égale à 1,097. Il résulte donc des expériences précédentes que le pouvoir rotatoire demeure constant, dans le quartz même après que la compression l'a rendu biaxe.

Si l'on construit les courbes relatives à d , φ et k en portant en abscisses les incidences et en ordonnées les quantités précédentes, on voit que (fig. 22 et 23) :

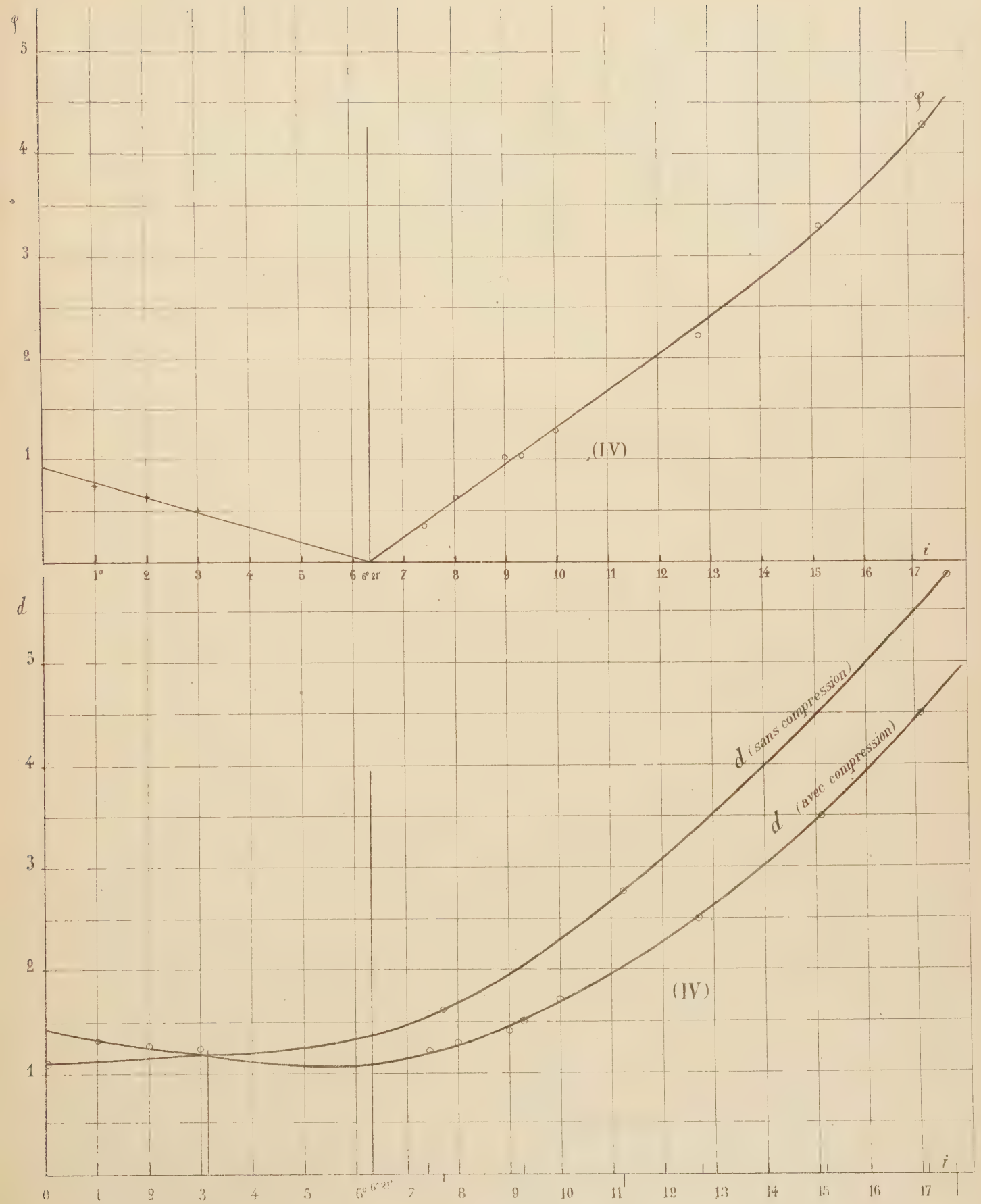
1° Quand l'incidence augmente d et φ diminuent d'abord pour augmenter ensuite ;

2° Que k augmente d'abord pour diminuer ensuite.

Cela résulte nécessairement de ce fait que le quartz ainsi comprimé, possède les deux axes optiques des biaxes. Quand l'incidence va croissant avec la normale à la lame (ancien axe du quartz naturel uniaxe), l'angle que fait le rayon de lumière avec l'axe optique diminue et par suite aussi la différence de marche, aussi bien celle des vibrations elliptiques, que celle due à la double réfraction ordinaire. Lorsqu'on atteint l'incidence qui correspond à l'axe optique dans l'air la polarisation elliptique devient circulaire, autrement dit, les deux vibrations elliptiques d'Airy, ou les deux vibrations privilégiées de Gouy deviennent toutes les



(fig. 22)



deux circulaires ; pour cette direction l'ellipse émergente se réduit à une droite, et l'on retrouve pour cette incidence le pouvoir rotatoire seul, l'effet dû à la double réfraction ordinaire étant nul ; ensuite on obtient les courbes à peu près symétriques quand l'incidence va grandissant. L'incidence par rapport à laquelle les courbes sont symétriques est environ $6^{\circ} 30'$, c'est la direction de l'axe dans l'air. Pour cette incidence on a :

$$i = 6^{\circ} 30' \quad \frac{\omega}{\pi} = 1,097 \quad \varphi = 0 \quad d = 1,097 \quad k = 1,00 .$$

Dans le calcul on n'a pas tenu compte de la variation d'épaisseur due à la compression.

Il est intéressant de vérifier qu'en somme les biaxes possèdent le pouvoir rotatoire suivant la direction de leurs axes optiques. C'est une conséquence de la théorie de Mac-Cullagh dont nous avons déjà parlé :

« Cette conséquence ⁽¹⁾, dit Verdet, n'a pu être vérifiée expérimentalement. D'abord, il est rare de rencontrer des cristaux à deux axes, assez transparents et assez purs ⁽²⁾ pour se prêter à des expériences de ce genre, et qu'on puisse tailler perpendiculairement à la direction d'un axe optique ; dans les cristaux à un axe, le rayon ordinaire a une vitesse constante et le rayon extraordinaire acquiert sa vitesse maximum ou minimum lorsqu'il se meut dans la

(1) *Optique physique*, t. VI, p. 326.

(2) La difficulté de rencontrer des cristaux capables d'être taillés est très grande à cause surtout des macles nombreuses que l'on rencontre. Le sucre de canne serait, sans cela, un cristal biaxe que l'on pourrait étudier au point de vue de la superposition des effets de birefringence et de pouvoir rotatoire que l'on peut admettre, se conservant dans toute direction de cristal. Les indices principaux (1,5716 ; 1,5666 ; 1,5597) permettent de trouver la différence de marche le long de la bissectrice aigue des axes, soit $\varphi = 0,0119 \lambda$. Le pouvoir rotatoire du sucre de canne est pour 1^{cm} d'épaisseur égal à $\frac{\omega}{\pi} = 0,0406$. Le rapport $h = \frac{\pi\varphi}{\omega} = 0,29314$, on déduit, pour l'ellipticité de l'une des vibrations de Gouy, $k = 0,749$, ellipticité accessible à une détermination possible ; mais l'inconvénient principal est la difficulté est de se procurer un cristal assez gros, exempt de macles, assez pur et assez transparent pour être taillé.

direction de l'axe. Il en résulte que les phénomènes varient très lentement au voisinage de l'axe. Dans les cristaux à deux axes, au contraire, l'axe optique est une direction suivant laquelle les vitesses des deux rayons sont fortuitement égales; aucune d'elle n'y est maximum ni minimum et elles varient rapidement dès qu'on s'en écarte. »

La mesure des paramètres d'une vibration elliptique par la méthode de de Sénarmont, présente les inconvénients inhérents à cette méthode; au voisinage d'une vibration circulaire la position du mica laisse à désirer tandis que cette position est bien déterminée lorsque l'ellipse est très allongée. Il est, par suite, préférable d'employer la modification de cette méthode, qui, au début de ce travail, a servi à étudier les phénomènes de biréfringence elliptique du quartz non comprimé. Elle revient à laisser le mica immobile (axe horizontal par exemple), et en inclinant la lame cristalline à chercher les incidences privilégiées qui donnent une ellipse émergente du quartz, à axe horizontal, dans la section principale du cristal; dans ces conditions le mica quart d'onde rétablit la rectilignité de la vibration, et l'azimut de polarisation rétablie s'obtient au moyen de l'analyseur (suivi toujours du quartz à deux rotations et du spectroscope).

La différence de marche d des vibrations elliptiques d'Airy, capables d'engendrer une pareille ellipse émergente est de la forme

$$d = \left(2p + 1\right) \frac{\lambda}{2} = p\lambda + \frac{1}{2}\lambda ,$$

et si on désigne par α l'azimut de la polarisation rétablie, l'ellipticité des vibrations elliptiques interférentes est donnée par

$$\operatorname{tg} 2\varepsilon = \operatorname{tg} \alpha ,$$

d'où $k = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ et comme il a été déjà dit antérieurement :

$$\varphi = d \cos 2\varepsilon . \quad \frac{\omega}{\pi} = d \sin 2\varepsilon .$$

Le tableau suivant donne les mesures relatives aux quatre premières franges que l'on voit défiler dans le champ de la lunette du spectroscope, lorsqu'on incline de plus en plus le cristal sur la lumière incidente :

TABLEAU A'.

N° de la frange	i	α	$\frac{\omega}{\pi}$	φ	d	k
1	9° 14' 30"	46° 25'	1,0866	1,0345	1,5	0,428
2	12° 45'	25° 37' 30"	1,0810	2,254	2,5	0,227
3	15° 7'	18°	1,0816	3,328	3,5	0,158
4	17° 9'	13° 22' 30"	1,041	4,378	4,5	0,117

Nous donnons dans le tableau suivant les deux séries de mesures :

TABLEAU A et A'.

i	A	M	$\frac{\omega}{\pi}$	φ	d	k
0°	25° 45'	40° 52' 30"	1,035	0,837	1,332	0,477
1°	30° 15'	40° 10'	1,060	0,751	1,305	0,520
2°	23°	41° 24' 15"	1,092	0,661	1,299	0,574
3°	25° 30'	34° 30'	1,103	0,517	1,218	0,635
6° 21'	7° 27' env.	7° 27' env.	1,097	0,000	1,097	1,000
7° 24'	27° 15'	30° 45'	1,070	0,388	1,193	0,722
8°	28° 30'	36°	1,053	0,668	1,265	0,522
9°	36°	47°	1,001	1,039	1,443	0,403
9° 14' 30"	46° 25'	0°	1,086	1,034	1,500	0,428
10°	55°	66° 30'	1,091	1,304	1,701	0,364
12° 45'	25° 37' 30"	0°	1,081	2,254	2,500	0,227
15° 7'	18°	0°	1,081	3,328	3,500	0,158
17° 9'	13° 22' 30"	0°	1,041	4,378	4,500	0,117

Les différences de marche sont relatives à l'épaisseur réellement traversée par le rayon de lumière; elles n'ont pas été réduite à l'unité d'épaisseur, il faudrait pour les y ramener, diviser le résultat par $\frac{e}{\cos r}$, r étant l'angle de réfraction (angle de réfraction moyen des deux rayons réfractés).

On peut tirer de ce tableau quelques conséquences :

1° Il résulte de la valeur trouvée pour $\frac{\omega}{\pi}$, que, aux erreurs expérimentales près, $\frac{\omega}{\pi}$ a une valeur constante.

Ainsi on retrouve le pouvoir rotatoire du quartz, pour des directions de propagation inclinées sur l'ancien axe optique du quartz naturel, et sur les axes optiques du quartz comprimé.

Quant à la valeur de φ la courbe IV (*fig. 22*) montre que φ diminue d'abord, s'annule pour $i = 6^{\circ} 21'$ pour croître ensuite. Les deux branches de courbes ne sont pas absolument symétriques par rapport à cette incidence à cause de l'épaisseur traversée qui est de plus en plus grande et qu'il faudrait ramener à l'unité dans chaque cas.

2° Si l'on construit la courbe relative aux différences de marche d des vibrations elliptiques, suivant que le quartz est comprimé ou non ⁽¹⁾ on constate que la première courbe (quartz comprimé) reste au-dessous de la seconde (quartz non comprimé) pour les incidences supérieures à $3^{\circ} 10' 30''$ et se trouve au-dessus pour les incidences inférieures. — Si l'on compare au contraire la valeur de k suivant que l'on opère sur le quartz naturel ou comprimé (courbe V, *fig. 23*) on constate que à incidences égales (et supérieures à $3^{\circ} 10' 30''$) le paramètre k qui définit la forme des vibrations elliptiques a une valeur plus grande pour le quartz comprimé que pour le quartz naturel. C'est ce qui résulte du tableau suivant :

(1) Pour construire la courbe dans le cas du quartz naturel, on s'est servi des résultats contenus dans le tableau C (p. 69, chapitre IV, $e = 0^{\text{cm}} 89$) pour les valeurs de d , et dans le tableau G (p. 75, chapitre IV) pour celles de k .

TABLEAU A".

i	d		k	
	Quartz non comprimé	Quartz comprimé	Quartz non comprimé (1)	Quartz comprimé
9° 14' 30"	2,0	1,5	0,310	0,428
12° 45'	3,4	2,5	0,160	0,227
15° 7'	4,6	3,5	0,110	0,158
17° 9'	5,8	4,5	0,100	0,117

Nous avons, tout d'abord, interprété ce résultat en admettant une diminution dans le pouvoir rotatoire ; ce qui n'est pas exact. Il suffit de remarquer que si dans les deux cas l'angle d'incidence i avec la normale est le même, il n'en est pas ainsi de l'angle fait par le rayon à l'intérieur du cristal avec l'axe optique du quartz naturel, ou avec l'un des axes optiques du quartz comprimé. Pour une incidence supérieure à 6° 21' l'angle que fait le rayon intérieur avec l'un des axes optiques du quartz comprimé est inférieur à l'angle fait par le même rayon avec l'axe optique du quartz non comprimé, il est donc naturel que la différence de marche d soit plus petite et que l'ellipticité k des vibrations d'Airy soit plus grande dans le cas du quartz soumis à la compression.

Pour une incidence inférieure à 6° 21' les courbes se coupent en un certain qui correspond approximativement à $i = 3° 10' 30''$ environ. A cette incidence correspond une direction de propagation qui, à l'intérieur du cristal, est à peu près bissectrice de l'angle formé par la normale à la lame (axe optique du quartz non comprimé) et par l'un des axes optiques. Il en résulte que dans le quartz naturel, l'angle que fait avec l'axe optique cette direction de propagation est à peu près le même que l'angle de cette direction avec l'un des axes optiques, dans le cas du quartz comprimé. La différence

(1) Nombres déduits de la courbe V.

de marche est donc la même à cause de cette égalité dans l'angle de la direction de propagation et de l'axe optique qu'il faut considérer dans chaque cas.

Il nous reste à déterminer la valeur de cette pression obtenue au moyen de la pince de Wertheim et non avec le dynamomètre ; il suffit d'appliquer la relation déjà indiquée :

$$\varphi_0 = -0,0409 + 0,0045 P$$

relative au cristal étudié ; φ_0 correspondant à l'incidence normale est égal à 0,837. On en déduit $P = 195^{\text{kg}}$ environ par centimètre carré, — Telle est la valeur de la pression à laquelle correspondent les expériences des tableaux A et A'. On peut se proposer de mesurer directement *l'angle des axes optiques* dans l'air par la méthode ordinaire, mais il faut remarquer qu'à cause de la dispersion de double réfraction et de pouvoir rotatoire, on ne peut prétendre à une grande exactitude en opérant en lumière blanche. Toutefois, sans recourir au microscope polarisant, on peut, avec l'appareil même qui a servi à faire les mesures projeter les lemniscates du quartz comprimé de la manière suivante.

La lumière polarisée à 45° du plan d'incidence (horizontal) tombe sur une petite lentille convergente, qui concentre le faisceau incident parallèle et le transforme en un faisceau conique, dont le sommet est sur la lame de quartz, maintenu dans la pince de compression.

Au sortir du cristal, les rayons lumineux sont reçus sur un analyseur croisé avec le polariseur.

La ligne des axes optiques se trouvant dans le plan de compression, dans le cas du quartz, est dans le plan horizontal, à 45° des sections principales du polariseur et de l'analyseur. On obtient ainsi les courbes isochromatiques des biaxes, que l'on projette sur un écran, à la surface duquel on a tracé un point de repère. En agissant sur la pince de compression, et inclinant celle-ci sur les rayons incidents, on amène successivement sur ce trait les deux centres des lemniscates. La lecture du limbe qui porte la lame cris-

talline, donne immédiatement l'angle extérieur des axes optiques, pour une radiation moyenne, par suite en opérant en lumière blanche, pour une radiation mal définie.

En opérant ainsi, on a trouvé :

$$11^{\circ}21' \quad 11^{\circ}13' \quad 12^{\circ}8' \quad 11^{\circ}34' \quad 11^{\circ}48' \quad 11^{\circ}45'$$

dont la moyenne est :

$$11^{\circ}38' ,$$

ce qui donne pour l'angle de l'un des axes optiques avec la bissectrice aiguë (ancien axe du quartz naturel) un angle égal à

$$5^{\circ}49'$$

qui diffère d'un demi-degré environ de celui que l'on a déduit de l'inspection des courbes IV et V (fig. 22-23), soit $6^{\circ}21'$.

On peut encore déterminer le demi-angle vrai des axes optiques à l'intérieur du cristal au moyen de la formule approchée (1) :

$$tg^2 V = \frac{D-d}{n_e - n_o} .$$

La valeur de $D-d$ se déduit de la différence de marche pour l'incidence normale à la lame ; la différence de marche due à la biréfringence holoédrique est, pour de faibles obliquités, donnée par la relation connue (2) :

$$\varphi\lambda = e \left[\frac{1}{b} - \frac{1}{a} - c^2 \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a} \right) \sin^2 i \right]$$

pour $i = 0$ on a

$$\varphi_o\lambda = e \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) = e(D-d)$$

d'où

$$D-d = \varphi_o \frac{\lambda}{e} .$$

(1) MALLARD. — *Traité de cristallographie*, t. II, p. 343.

(2) MASCART. — *Optique physique*, t. I, p. 578.

Or, pour l'expérience faite avec la pince de compression, on a $\varphi_0 = 0,837$; on en déduit $D-d = 0,0000547$, et en appliquant la relation (1)

$$n_e - n_o = 0,00913206 (1 - 0,0001246 t)$$

qui donne la valeur de $n_e - n_o$ aux diverses températures, on trouve

$$V = 4^\circ 25' 30'' ,$$

V étant le demi-angle vrai des axes, la pression étant d'environ 195^{kg} par centimètre carré; il est facile d'en conclure l'angle correspondant dans l'air (2), soit

$$E = 6^\circ 36' 50'' .$$

Nous donnons, ci-après, la valeur de cet angle suivant qu'on le déduit de l'inspection des courbes IV et V, de l'observation directe, ou de la relation qui donne $tg^2 V$.

PRESSION 195^{kg} .

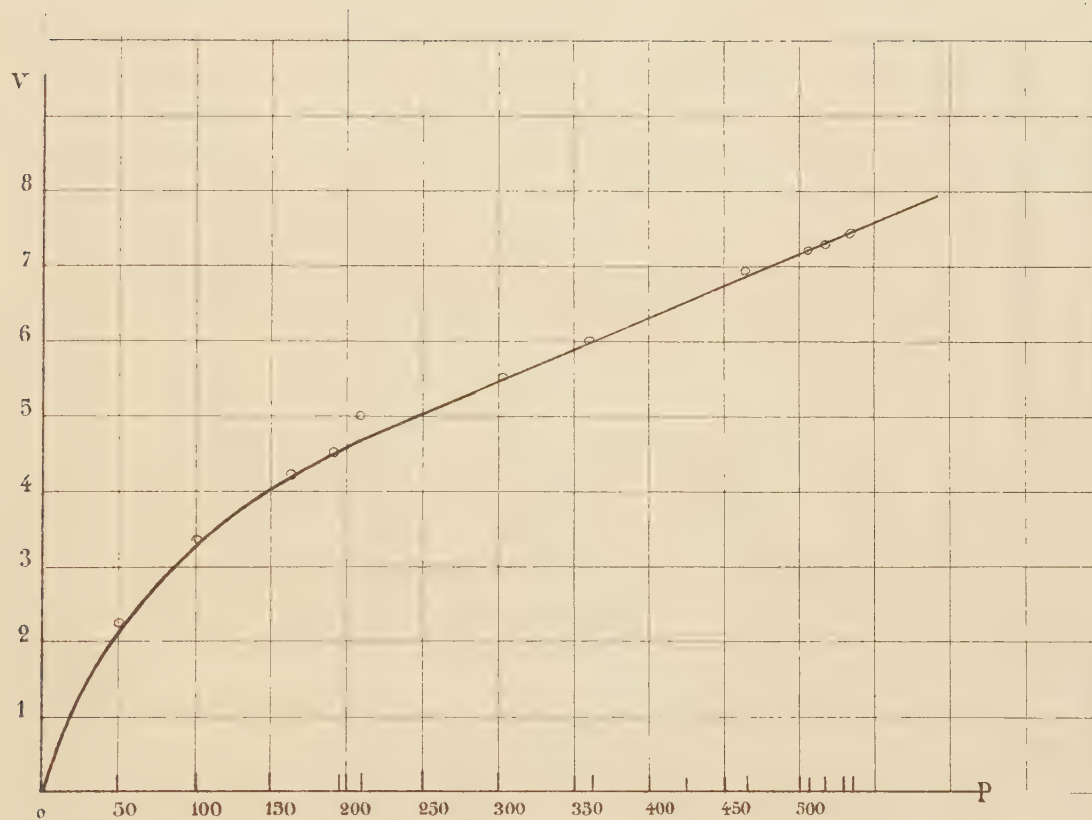
E = 1/2 angle dans l'air.		V = 1/2 angle vrai.
Par les courbes IV et V (fig. 22-23) ..	$6^\circ 21'$	$4^\circ 15'$
Par l'observation directe	$5^\circ 49'$	$3^\circ 54'$
Par la relation $tg^2 V = \frac{D-d}{n_e - n_o} \dots$	$6^\circ 36' 50''$	$4^\circ 25' 30''$

La différence des valeurs extrêmes ($4^\circ 25' 30''$; $4^\circ 15'$) atteint un demi-degré environ; on peut regarder la concordance comme suffisante.

On peut utiliser, dans le même but, pour chercher comment varie l'angle des axes avec la pression, les expériences faites avec le dynamomètre, et qui ont été relatées dans un précédent chapitre.

(1) Macé de Lépinay.

(2) Il faut connaître l'indice moyen n_b du quart comprimé devenu bi-axe; il est possible, comme on le verra ci-après, de déterminer approximativement $n_a n_b n_c$; on a alors $\frac{\sin E}{\sin V} = n_b = 1,4926$, d'où on tire la valeur de E.



(VI)

Fig. 13

Les valeurs de φ_o (différence de marche due à la double réfraction, pour l'incidence normale) tirées du tableau du chapitre précédent permettent de trouver V, correspondant à la pression (lue sur le dynamomètre), sous laquelle a été faite l'expérience ; V se calcule par la formule :

$$tg^2 V = \frac{\frac{\lambda}{e} \varphi_o}{n_e - n_o}.$$

C'est ainsi qu'on a dressé le tableau suivant :

TABLEAU B.

PRESSIONS par c. q.	D — d	V
50 kg	0,0000 13534	2° 12' 15"
100 kg	0,0000 29749	3° 16'
195 kg (1)	0,0000 54700	4° 25' 30"
220 kg	0,0000 69606	4° 58' 45"
300 kg	0,0000 82579	5° 25' 55"
360 kg	0,0000 99906	5° 38' 20"
460 kg	0,0000 13475	6° 55' 35"
505 kg	0,0000 14626	7° 12' 45"
520 kg	0,0000 14947	7° 17' 25"
530 kg	0,0000 15215	7° 21' 20"

Si on porte en abscisses les valeurs de la pression, et en ordonnées les valeurs de V, on a la courbe VI (fig. 24).

Le Dr Bucking (2) avait comprimé une plaque de quartz et

(1) Expérience faite avec la pince de compression.

(2) *Neues. Jahrb. für Min und Gebl.*, p. 199 (1880); *Zeitschrift für Kryst.*, p. 555, t. VII, 1882; et *Journal de physique* [2], t. III, p. 106, 1884.

obtenu, sous une pression de 122^{kg} par centimètre carré, un angle

$$V = 3^{\circ}52' ,$$

d'où on déduirait la quantité

$$D - d = 0,0000426 .$$

Le même auteur a encore vérifié que la déformation produite avec des cristaux comme le quartz et l'orthose n'est pas permanente ; elle reste, au contraire, permanente mais peu considérable, avec les uniaxes tels que le béryl et la tourmaline ⁽¹⁾.

On peut déduire encore de la valeur φ_0 de la différence de marche sous l'incidence normale, pour diverses pressions, la valeur du *coefficient d'élasticité optique du quartz, le long de la bissectrice aiguë des axes optiques*.

La différence de marche due à la double réfraction seule est proportionnelle au chemin parcouru par la lumière dans le cristal, et aussi à la pression par unité de surface ; c'est ce qui résulte du mémoire classique de Wertheim ⁽²⁾ sur la compression du verre, et de ce que j'ai indiqué déjà pour le quartz, dans un chapitre précédent.

Soit P cette pression évaluée en kilogramme, on a

$$\varphi\lambda = e \frac{P}{C} ,$$

C étant le coefficient d'élasticité optique

$$C = \frac{eP}{\varphi\lambda} ,$$

ou plus exactement

$$C = \frac{e}{\lambda} \cdot \frac{\delta P}{\delta \varphi} ,$$

$\frac{\delta P}{\delta \varphi}$ étant le rapport de l'accroissement de la charge à l'accroissement de la différence de marche pour l'unité d'épaisseur.

(1) MALLARD. — *Traité de cristallographie*, t. II, p. 345.

(2) WERTHEIM. — *Ann. de Phys. et de Chimie* [3], XII, p. 136. — Th. de Paris, 1855.

Le tableau suivant donne les résultats obtenus, en prenant comme éléments du calcul, les valeurs de φ et de P du tableau A (ch. VII), les pressions varient de 0^{kg} à 530^{kg}.

TABLEAU C.

P	φ	C
50	0,207	369 43 00
100	0,455	336 14 00
220	1,060	317 43 00
300	1,263	363 29 00
360	1,528	360 34 00
460	2,061	338 23 00
505	2,237	345 27 00
520	2,286	347 90 90
530	2,327	348 35 00

La moyenne du coefficient d'élasticité optique est $C_m = 3473765$, on peut aussi déterminer $\frac{\partial P}{\partial \varphi}$ en utilisant la formule empirique

$$\varphi = - 0,0409 + 0,0045 P$$

qui donne

$$\frac{d\varphi}{dP} = 0,0045 \quad \text{et} \quad \frac{dP}{d\varphi} = 222,22 ,$$

d'où

$$C = \frac{e}{\lambda} \cdot \frac{dP}{d\varphi} = 339 87 57 ,$$

nombre qui est de l'ordre de grandeur du coefficient optique du verre, déterminé par Wertheim (1). La pression capable de produire un

(1) Voici, d'après Wertheim, la valeur de c pour quelques corps :

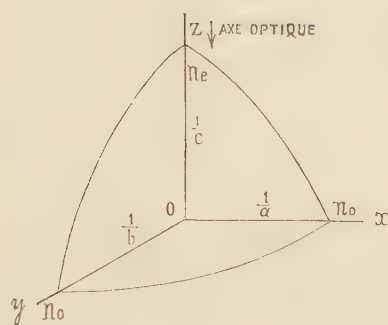
Crown.....	c varie de	2697800 à 2992300
Verre à glaces....	—	3239600
Flint	—	3259300 à 5733200

retard donné est aussi d'un ordre de grandeur comparable dans le verre et dans le quartz. En effet, une pression de 530 kilogr. par centimètre carré, produit un retard de $2\lambda,327$ pour une épaisseur de 9^{mm} environ ; ou encore une pression de $5^{\text{kg}} 30$ par millimètre carré pour une épaisseur de 1^{mm} engendre un retard de $0\lambda258$ en sorte que pour produire un retard d'une demi-longueur d'onde, à travers un millimètre d'épaisseur, il faut environ une pression de 10^{kg} par millimètre carré. — Wertheim, pour le verre, avait trouvé le millimètre étant pris pour unité, qu'il fallait une pression d'environ $8^{\text{kg}} 25$.

Modification des indices du quartz par la compression, résultats relatifs à une compression de 195^{kg} environ — Nous avons vu que la compression déformait l'ellipsoïde inverse, et qu'il y avait lieu de considérer dès lors trois indices principaux

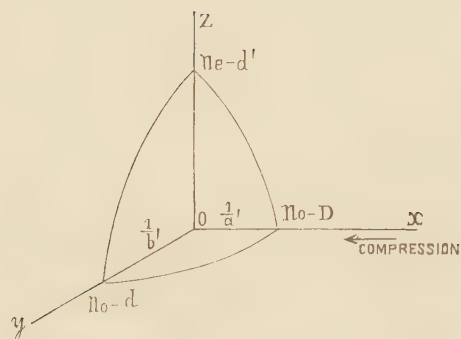
$$n_o - D \qquad n_o - d' \qquad n_e - d .$$

Les figures suivantes (fig. 25) montrent l'ellipsoïde inverse avant et après la compression, et la surface des vitesses normales qu'on en peut déduire dans chaque cas.

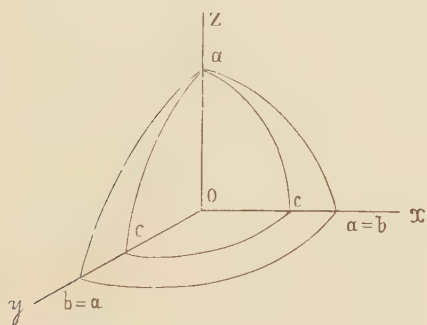


Ellipsoïde inverse avant la compression ($a = b = c$).

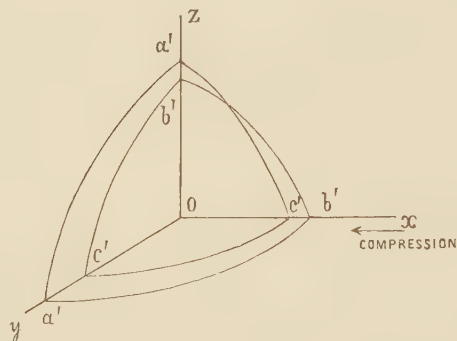
Fig. (25).



Ellipsoïde inverse après la compression $a' > b' > c'$.



Surface des vitesses normales avant la compression.



Surface des vitesses normales après la compression.

Si l'on considère un rayon de lumière qui se propage suivant une direction faiblement inclinée sur la bissectrice aiguë des axes optiques la différence de marche correspondante est donnée par la relation (1).

$$\varphi \lambda = e \left[\frac{1}{b} - \frac{1}{a} - c^2 \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a} \right) \sin^2 i \right],$$

$a b c$ ayant les significations habituelles.

Pour l'incidence normale on a :

$$\varphi_0 \lambda = e \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right);$$

(1) MASCART. — *Optique physique*, t. I, p. 578.

or, on a (voir la figure ci-dessus)

$$\frac{1}{b} = n_o - d \quad \frac{1}{a} = n_o - D \quad \frac{1}{c} = n_e - d' ,$$

d'où

$$\varphi_o \lambda = e(D - d) ;$$

or $\varphi_o = 0,837$ pour l'expérience faite avec la pince, la pression étant 195^{kg} par centimètre carré; on en déduit

$$D - d = 0,000547 .$$

Pour l'incidence i qui correspond à l'axe optique dans l'air, la valeur de φ est nulle; on a alors pour cette valeur de i

$$c^2 \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a} \right) = \frac{D - d}{\sin^2 i} ;$$

si on prend en chiffre rond pour i la valeur 6°30' on trouve

$$c^2 \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a} \right) = 0,0040734 ;$$

en posant

$$A = c^2 \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a} \right)$$

on a

$$(1) \quad A = \frac{n_e - n_o + D - d'}{(n_e - d')^2} ;$$

or, on peut admettre que d est peu différent de d' , il est donc permis de prendre comme valeur approchée de $D - d'$ la valeur de $D - d$; si on prend

$$\left\{ \begin{array}{l} D - d = D - d' = 0,000547 \\ n_e - n_o = 0,00913206 \\ A = 0,0040734 \end{array} \right.$$

on déduit de la relation précédente (1)

$$n_e - d' = 1,50177 ;$$

si on admet

$$n_e = 1,55339 \quad n_o = 1,54426$$

on a la valeur approchée de d et de d'

$$d = d' = 0,05162 ,$$

d'où

$$D = 0,0516747 ;$$

on a en définitive pour les indices et les vitesses principales (1):

$$\left\{ \begin{array}{l} n_o - D = 1,49259 \\ n_o - d = 1,49264 \\ n_e - d' = 1,50177 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a' = 0,66998 \\ b' = 0,66995 \\ c' = 0,66588 \end{array}$$

(1) La notation que nous avons employée $n_{a'} = n_o - D$ $n_{b'} = n_o - d$ $n_{c'} = n_e - d'$ est celle de M. Mallard; on peut employer une autre forme; avant la compression on a

$$a = \frac{1}{n_o} \quad b = \frac{1}{n_o} \quad c = \frac{1}{n_e} ,$$

après la compression

$$a' = \frac{1}{n_o - D} \quad b' = \frac{1}{n_o - d} \quad c' = \frac{1}{n_e - d'} ;$$

soient α, β, γ les variations de vitesse, on a

$$\left\{ \begin{array}{l} a' = a - \alpha \\ b' = b - \beta \\ c' = c - \gamma \end{array} \right\} \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} n_{a'} = \frac{1}{a - \alpha} = \frac{1}{a} \left(1 + \frac{\alpha}{a} \right) , \\ n_{b'} = \frac{1}{b - \beta} = \frac{1}{b} \left(1 + \frac{\beta}{b} \right) , \\ n_{c'} = \frac{1}{c - \gamma} = \frac{1}{c} \left(1 + \frac{\gamma}{c} \right) , \end{array} \right.$$

c'est la notation de M. Mascart. On a

$$\alpha = \frac{-D}{n_o(n_o - D)} ; \quad \beta = \frac{-D}{n_o(n_o - d)} ; \quad \gamma = \frac{-D}{n_e(n_e - d')} ;$$

on en déduit

$$n_{a'} = \frac{1}{a} \left(1 + \frac{\alpha}{a} \right) = \frac{n_o^2 - 2n_o D}{n_o - D} ;$$

on peut ajouter D^2 , il vient

$$n_{a'} = \frac{n_o^2 - 2n_o D + D^2}{n_o - D} = n_o - D \dots \dots \text{etc.},$$

et l'on retrouve la notation adoptée dans ce qui précède.

Les résultats précédents sont relatifs à une pression de 195^{kg} par centimètre carré environ.

Le plan des axes, est parallèle à la compression et l'axe oz de plus faible élasticité coïncide avec la bissectrice aiguë des axes optiques. Le quartz comprimé est donc biaxe positif, ainsi que cela devait arriver, on vérifie la condition

$$2b' - (a' + c') > 0$$

des cristaux positifs ; en effet

$$2b' - (a' + c') = 0,00404 .$$

quant à l'énergie de la biréfringence, elle est donnée par le rapport

$$\frac{(a - c)^2}{c^3} .$$

qui est égal à

$$0,000037912 ;$$

on peut prendre en chiffres ronds

$$0,000038 ;$$

à l'état naturel on a pour la biréfringence du quartz

$$0,000034 ;$$

ainsi la biréfringence optique augmente par la compression.

CONCLUSIONS

Les conclusions de ce travail sont les suivantes :

A — 1° J'ai introduit dans les formules classiques d'Airy, une simplification qui permet d'exprimer très facilement les paramètres de la biréfringence elliptique du quartz en fonction de données accessibles à l'expérimentation.

2° J'ai indiqué une nouvelle méthode d'analyse des vibrations elliptiques, qui est une modification de celle de De Sénarmont rendue plus sensible par une disposition permettant de déterminer avec précision le plan de polarisation rétablie.

3° Cette méthode a été appliquée à l'étude des propriétés du quartz dans les directions obliques à l'axe, et j'ai comparé les résultats de l'expérience avec ceux que l'on peut déduire de la théorie de M. Gouy. D'après les idées de ce physicien les phénomènes que présente le quartz dans une direction oblique à l'axe, peuvent être considérés comme résultant de la superposition d'un pouvoir rotatoire constant et d'une double réfraction holoédrique variable avec l'obliquité ; cette théorie conduit en effet à des résultats absolument conformes à l'expérience.

4° En soumettant de même à une vérification semblable les théories mathématiques de divers auteurs, on trouve que : les théories de M. Ketteler et de M. Lommel doivent être absolument rejetées ; que les théories de M. Sarrau et de M. Boussinesq donnent des résultats à peu près conformes à l'expérience, tandis que la théorie de Cauchy peut être admise comme exacte au même titre que la théorie de M. Gouy.

Dans la deuxième partie de ce travail, j'ai étudié expérimentalement les nouvelles propriétés optiques qui résultent pour le quartz de l'adjonction à son pouvoir rotatoire et à sa biréfringence naturelle, d'une biréfringence supplémentaire obtenue par une compression normale à l'axe optique du cristal.

B — *Quartz normal à l'axe soumis à des pressions croissantes.* — Le rayon tombe normalement à la lame cristalline suivant une direction où la biréfringence naturelle est nulle, en sorte que pour une pareille incidence on associe à un pouvoir rotatoire constant une biréfringence accidentelle croissante. En opérant ainsi on constate que le quartz présente suivant cette direction, la polarisation elliptique et non plus circulaire et que :

1° Le pouvoir rotatoire demeure constant et indépendant de la pression ;

2° La double réfraction accidentelle est proportionnelle à la pression.

3° On constate encore que le grand axe de l'ellipse émergente oscille périodiquement lorsque la pression croît, autour de la direction de la vibration incidente primitive et pour des directions particulières se confond avec elle.

4° Pour ces directions successives, l'ellipticité de cette vibration émergente est nulle ou maximum. Tous ces résultats sont conformes à la théorie de M. Gouy et constituent une nouvelle vérification.

C — *Quartz normal soumis à une pression donnée.* — Dans ces conditions on opère sous une pression donnée et on étudie le phénomène sous des incidences obliques à la lame. Suivant une pareille direction la double réfraction provient à la fois de la biréfringence naturelle du quartz et de la double réfraction accidentelle introduite par la pression :

1° J'ai vérifié que le quartz ainsi comprimé devenait biaxe, et que conformément aux idées de M. Gouy, la polarisation elliptique s'explique par la superposition d'un pouvoir rotatoire constant

indépendant de la direction (1), et d'une double réfraction complexe. Il est à remarquer que je me suis ainsi trouvé étendre au cas d'un cristal devenu biaxe, la théorie des effets simultanés du pouvoir rotatoire et de la biréfringence holoédrique.

2° Lorsque le rayon de lumière traverse le quartz comprimé, suivant l'un des axes optiques, la polarisation elliptique devient circulaire ; ainsi les biaxes présentent le pouvoir rotatoire dans la direction de leurs axes optiques.

D — 1° En utilisant les expériences faites sous des pressions différentes, j'ai déterminé l'angle des axes optiques pour des pressions variables de 0 kg. à 500 kg. ;

2° Des mêmes expériences on peut déduire, de la biréfringence le long de la bissectrice aiguë des axes optiques (ancien axe optique), le coefficient d'élasticité optique du quartz pour cette direction.

3° Pour une pression donnée, j'ai déterminé approximativement la valeur des trois indices principaux du quartz biaxe et constaté que la biréfringence augmente avec la pression.

Vu et approuvé :

Paris, le 4 Août 1892.

Pour M. le Doyen empêché,

Le Professeur délégué,

F. TISSERAND.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 4 Août 1892.

Le Vice-recteur de l'Académie de Paris,

GRÉARD.

(1) Rappelons pour mémoire que Ed. Becquerel avait trouvé la rotation magnétique dans le quartz (*Ann. de Phys. et de Chimie*, 3^e série, t. XVII, p. 437), rotation confirmée par les expériences de Bertin (*Ann. de Phys. et de Chimie*, 3^e série, XXIII, 1889) ; d'un autre côté, Lüdge a vérifié que le quartz possède le pouvoir rotatoire magnétique non-seulement suivant l'axe, mais encore dans des directions inclinées sur l'axe. (*Pogg. Ann.*, CXXXVII, 271-289, 1869, et *Ann. de Phys. et de Chimie*, 4^e série, t. XVIII.)

SECONDE THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Histoire chimique de la silice.

Etats allotropiques de la silice cristallisée.

Vu et approuvé :

Paris, le 4 Août 1892.

Pour M. le Doyen empêché,

Le Professeur délégué,

F. TISSERAND.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 4 Août 1892.

Le Vice-recteur de l'Académie de Paris,

GRÉARD.

ERRATA

Page	Au lieu de :	Lisez :
120	fig. 21	fig. 16.
122	fig. 7	fig. 17.
126	quartz vert D fig. 20	fig. 18.
126	quartz rouge G fig. 20	fig. 19.
129	(III) fig. 18 .	fig. 20.
129	IV fig. 19	fig. 21.
134	fig. 21	fig. 22.
136	fig. 22-23	fig. 23-24.
145	VI fig. 24 dans le texte et VI fig. 13 sur la planche	fig. 25.
149	fig. 25	fig. 26.

